А. А. Логунов

Лекции по теории относительности и гравитации

Современный анализ проблемы

А. А. Логунов

Лекции по теории относительности и гравитации

Современный анализ проблемы

Москва «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
1987

ББК 22.313
Л68
УДК 531.51

Логунов А. А. **Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 272 с.

В лекциях, следуя представлениям Минковского, показано, что суть и главное содержание теории относительности заключаются в единстве пространства-времени, геометрия которого псевдоевклидова. В рамках теории относительности и принципа геометризации однозначно построена релятивистская теория гравитации, которая объясняет все имеющиеся гравитационные эксперименты и дает принципиально новые представления о развитии Вселенной и гравитационном коллапсе.

Лекции издавались в МГУ в качестве учебного материала для студентов.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников физических специальностей.

Ил. 4. Библиогр. 75 назв.

Рецензент

доктор физико-математических наук *Я. А. Смородинский*

$Л \frac{1704020000-169}{053(02)-87}$ 105-87

Оглавление

Предисловие

В истории развития физики основные вехи познания связаны с творениями величайших естествоиспытателей, где на основании анализа предшествующих исследований и новых глубоких идей и методов совершался крупный шаг в познании природы.

Великие творения ума всегда требуют серьезного и творческого изучения, ибо в них, как нигде, можно проследить зарождение и развитие великих идей. Изучение работ классиков является великолепной творческой лабораторией, если оно основывается на вдумчивом проникновении в сущность проблемы, а не на вере авторитету. Последнее всегда ведет к догматизму. Детальный творческий анализ классических работ иногда может вскрыть незавершенность идей, а порой и глубокие заблуждения, а это всегда может быть источником нового направления исследований. Но в истории науки известны и такие случаи, когда исследователь, не вникнув глубоко в содержание работы, уже делает вывод о непонимании автором сущности рассматриваемой проблемы, а отсюда даже допускает высказывания о приоритете открытия. Но если кто-то не понял работы, то причем здесь ее творец. Нельзя же собственное непонимание превращать в критерий оценки работы, тем более классической. Непонимание для исследователя всегда ценно, ибо оно может явиться толчком для углубленного изучения сути вопроса. Из глубокого непонимания иногда может появиться новое и значительное, но уже обязательно всегда что-то инте-

---

Предисловие к «Лекциям», прочитанным для студентов МГУ.

ресное, обогащающее исследователя новым знанием или подходом. Но это всегда требует серьезного труда и детального физического анализа.

Характер творческого восприятия, конечно, у всех различен, а поэтому понять кого-то — это тоже своеобразный творческий процесс, который иногда и не очень прост. Для исследователя имеется только один путь — это постараться глубже проникнуть в суть работы, при этом, быть может, ему необходимо предварительно изучить кое-что еще, чтобы понять работу классика. Но если все же ему не удается вникнуть в суть, а это вполне возможно, то это свидетельствует либо о своеобразном характере творческого восприятия этого исследователя, либо вообще о его уровне. Но и то, и другое имеет сугубо индивидуальное значение и не имеет никакого отношения к выяснению научной истины.

Все, о чем я сказал выше, часто встречается в физике, а поэтому, чтобы не затеряться в пути, необходимо, чтобы все изучаемое тщательно, а порой и многократно проходило через вашу творческую лабораторию.

Такой путь освоения выработает у вас самостоятельность мышления и свободную творческую мысль, опирающуюся на глубокие знания. Вы увидите на примере теории относительности, как формальное и неглубокое восприятие основных классических работ привело к серьезным заблуждениям. Освободиться от этих заблуждений и является целью моих лекций.

Я прочитаю несколько лекций по основам теории относительности или, как принято ее называть, специальной теории относительности. Теория относительности была создана выдающимися учеными Лоренцем [1], Пуанкаре [2—3], Эйнштейном [4] и Минковским [6], и, я думаю, эти гиганты фактически завершили теорию, а то, что было после них, это — изложение, порою правильное, порою неправильное, но почти всегда не глубокое.

Изложение теории относительности в современных учебниках и монографиях иногда очень частное и мелкое. Не выделено главное, авторы часто останавливаются на второстепенных проблемах, и может показаться, что эта теория есть некоторая совокупность рецептов, которые порой непросто понять в силу их ограниченности. Именно поэтому вначале я остановлюсь на основном постулате (см. § 3), который нельзя доказать и который следует из обобщения эксперимента. Его дòлжно воспринять, чтобы затем применять его к конкретным явлениям.

То, о чем говорится в настоящих лекциях, можно было бы сделать давно, после работы Минковского, и, наверное, он сам бы это все и разъяснил, если бы не ушел из жизни так рано. Однако догматизм и вера — всегда чуждые науке и постоянно ее сопровождающие — сделали свое дело. Они, почти до наших дней, ограничили уровень понимания и, как следствие, сузили область применения теории относительности. Только глубоко усвоив то, что заложено в работе Минковского и достаточно подробно раскрыто в лекциях, можно прийти к общей формулировке: теория относительности — это открытие единой псевдоевклидовой геометрии пространства и времени для электромагнитных явлений и ее распространение в качестве гипотезы на все формы материи.

В лекциях показано, что синхронизация часов, которой обычно в теории относительности придают большое значение, имеет частный характер. Что касается постулата о постоянстве скорости света, то даже в правильной формулировке, которая дана в лекциях, его роль ограничена, поскольку он имеет смысл только для инерциальных систем отсчета. Это означает, что на его основе в принципе не удастся выйти за рамки инерциальных систем отсчета.

Представления же о псевдоевклидовой геометрии единого пространства-времени являются более общими и фундаментальными. Они позволяют охватить с единой точки зрения как инерциальные, так и ускоренные системы отсчета и сформулировать обобщенный принцип относительности. Расширение области применения специальной теории относительности имеет не только принципальное, но и прикладное значение, поскольку оно позволяет изучать явления в некоторых экстремальных условиях.

Основу книги составили лекции, которые читались на физическом факультете МГУ в 1983—1984 учебном году. Отсюда возникли неизбежные повторения, за что автор приносит извинения читателям. В последней главе содержится ряд новых результатов, полученных в релятивистской теории гравитации.

Май 1987 г.

Глава 1

Пространство и время

§ 1. Представления о пространстве и времени в механике Ньютона

Принцип относительности является одним из древнейших и фундаментальнейших принципов современной физики. Его истоки восходят еще к натуральной философии. Зарождение и развитие этого принципа тесно связаны с развитием представлений о пространстве и времени, поскольку пространство и время являются той ареной, на которой протекают все физические процессы. Поэтому по мере развития наших физических знаний происходило и развитие представлений о пространстве и времени. Анализ развития представлений о пространстве и времени давайте начнем с механики Ньютона.

Начало бурного развития механики как науки о движении тел относится к середине XVII века. Механика того периода была опытной наукой, занимающейся установлением эмпирических соотношений между кинематическими и динамическими характеристиками движущихся тел и действующими на них силами. Как результат обобщения громаднейшего количества опытных данных Ньютоном были сформулированы три его знаменитых закона динамики и закон тяготения. Это дало возможность решать обширный для того времени круг задач о движении тел.

Механика Ньютона знаменовала собой и определенный этап в развитии представлений о пространстве и времени. При этом, с одной стороны, представления о евклидовой геометрии трехмерного пространства были явным образом заложены в механику Ньютона как следствие используемых в ней правил сложения векторов и определения величины расстояния между двумя точками. С другой стороны, проверка на опыте основных принципов механики Ньютона и сравнение ее предсказаний с результатами экспериментов показали с большой точностью, что трехмерное пространство действительно является евклидовым.

Свойства пространства и времени в механике Ньютона можно установить и в результате анализа группы преобразований, оставляющих уравнения движения форминвариантными. Запишем уравнения Ньютона, к примеру, для системы двух частиц:

$$M_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|};$$
$$M_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор первой частицы; $\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор второй частицы; M_1 и M_2 — массы соответственно первой и второй частиц.

Функция $F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ отражает характер действующих между телами сил. В механике Ньютона в основном рассматриваются силы двух типов: тяготения и упругости. Для этих типов сил имеем

$$F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

для сил тяготения и

$$F(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = -k|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

для сил упругости, где k — коэффициент жесткости; γ — гравитационная постоянная.

Из выражения (1.1) следует, во-первых, что эти уравнения являются форминвариантными относительно преобразования переноса начала координат, когда время не преобразуется, а координаты смещены на постоянный вектор:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}; \quad t' = t. \quad (1.2)$$

Действительно, при этом преобразовании радиусы-векторы первого и второго тел будут иметь вид

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b};$$
$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}.$$

Отсюда следует, что разность их радиусов-векторов не изменяется при преобразовании (1.2): $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'$. Кроме того, в силу второго из равенств (1.2) имеем $d/dt = d/dt'$.

Поэтому при преобразовании (1.2) уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} M_1\frac{d^2\mathbf{r}_1'}{dt'^2} &= F(|\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1'|)\frac{\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'|}; \\ M_2\frac{d^2\mathbf{r}_2'}{dt'^2} &= -F(|\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1'|)\frac{\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'|}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Сравнивая уравнения (1.1) и (1.3), убеждаемся, что они имеют одинаковую функциональную зависимость от координат, и поэтому, как говорят в таких случаях, уравнения механики являются форминвариантными при преобразованиях (1.2). Отметим также, что при преобразованиях (1.2) величина относительной скорости не изменяется:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\mathbf{v}=\frac{d}{dt'}(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')=\mathbf{v}'.$$

Физический смысл преобразования (1.2) можно трактовать двумя способами: а) описание механического явления не зависит от того, где мы поместим начало координат; б) если мы данное механическое явление перенесем в другую точку пространства, отстоящую на вектор $\mathbf{b}$ от первой, то в этой точке оно будет протекать аналогичным образом. Это означает, что в пространстве нет выделенных точек, а следовательно, оно однородно.

Во-вторых, преобразования сдвига по времени

$$t'=t+a; \quad \mathbf{r}'=\mathbf{r} \tag{1.4}$$

также оставляют уравнения (1.1) форминвариантными, поскольку при преобразовании (1.4) дифференциалы по времени совпадают:

$$\frac{d}{dt}=\frac{d}{dt'}.$$

Величина относительной скорости двух тел также не меняется при этом преобразовании. Преобразование (1.4) описывает перенос начала отсчета у всех часов на одну и ту же величину, без изменения пространственных координат. Поэтому форминвариантность уравнений механики при этом преобразовании означает отсутствие выделенного момента времени, физическое равноправие всех точек на временной оси, в результате чего один и тот же механический процесс при одинаковых начальных условиях будет протекать одинаковым образом, независимо от того, в какой момент времени мы его начнем, или, говоря другими словами, два механических процесса при одинаковых начальных условиях будут демонстрировать одинаковое течение процесса, независимо от выбора начального момента для каждого из них.

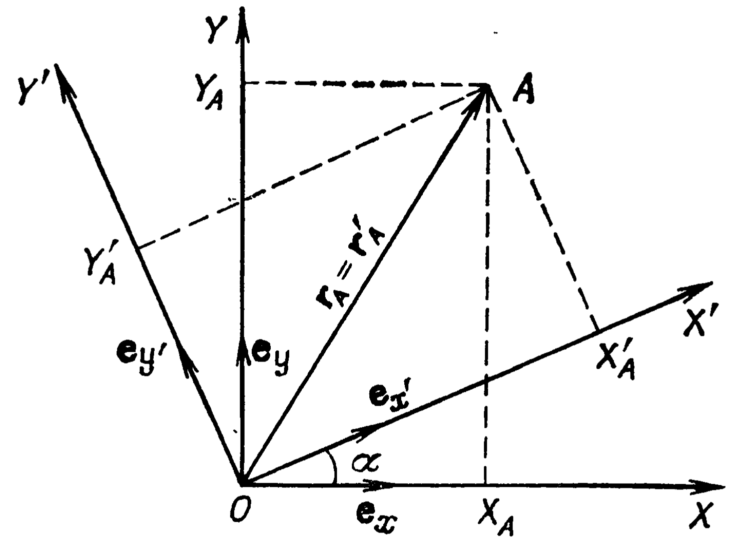

Рис. 1. Преобразование поворота системы координат вокруг оси

Далее, из этой же механики следует инвариантность уравнений (1.1) относительно поворота системы координат на произвольные углы. В частном случае поворота системы координат вокруг оси z на угол α (см. рис. 1) мы имеем

$$\begin{aligned} X'_A &= X_A \cos\alpha + Y_A \sin\alpha; \\ Y'_A &= Y_A \cos\alpha - X_A \sin\alpha; \end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$\mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x \cos\alpha + \mathbf{e}_y \sin\alpha;$$

$$\mathbf{e}_{y'} = \mathbf{e}_y \cos\alpha - \mathbf{e}_x \sin\alpha; \quad t = t',$$

поэтому

$$\mathbf{r}'_A = X'_A \mathbf{e}_{x'} + Y'_A \mathbf{e}_{y'} = X_A \mathbf{e}_x + Y_A \mathbf{e}_y = \mathbf{r}_A,$$

а следовательно, такое преобразование оставляет систему уравнений (1.1) форминвариантной. Иначе говоря, мы можем повернуть исходную систему координат на постоянный угол; от этого ход механического процесса не изменится. Это говорит об изотропности пространства, т. е. об отсутствии в пространстве выделенных направлений.

Таким образом, уравнения механики Ньютона позволяют сделать определенные заключения о свойствах пространства и времени: однородности и изотропности пространства и однородности времени. Если бы пространство и время не обладали этими свойствами, то механика Ньютона, основанная на уравнениях (1.1), с какой-то точностью могла быть и неверна.

Есть еще, однако, и четвертая группа преобразований, оставляющих уравнения (1.1) форминвариантными, которая в механике Ньютона всегда стояла особняком, а именно преобразования Галилея, описывающие переход от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t; \quad t' = t. \tag{1.6}$$

При этом преобразовании имеем

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}; \quad \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{1.7}$$

Подставляя соотношения (1.7) в уравнения (1.1), легко убедиться, что преобразование (1.6) оставляет уравнения механики форминвариантными. Однако если первые преобразования (1.2), (1.4) и (1.5) относились к трехмерному пространству или времени по отдельности, то данное преобразование рассматривалось как дополнительное, которое следует из уравнения механики Ньютона. Полностью осознано это преобразование не было. Правда, оно сразу приводит к подтверждению принципа относительности в механике, поскольку все механические процессы, рассматриваемые в одной инерциальной системе отсчета, и в другой, равномерно и прямолинейно движущейся относительно первой, по существу, протекают одинаковым образом. Когда вы занимаетесь изучением механических явлений, то не можете сказать, находитесь ли в покое или равномерно движетесь, поскольку преобразования (1.6) оставляют уравнения механики Ньютона форминвариантными и величина скорости $\mathbf{V}$ движения одной системы координат относительно другой в уравнения (1.1) не войдет. Таким образом, с преобразованием (1.6) в механике Ньютона и был связан принцип относительности Галилея.

Рассмотренные выше две группы преобразований: группа, отражающая свойства однородности времени и однородности и изотропности пространства и группа Галилея, имеют независимое существование, и глубокая связь между ними долгое время, вплоть до работ Пуанкаре и Минковского, по существу, не была установлена.

Из механики Ньютона также непосредственно следует, что расстояние в трехмерном пространстве, т. е. в пространстве координат, является инвариантом для всех инерциальных систем отсчета.

Действительно, расстояние между двумя точками A и B в нештрихованной (неподвижной) системе отсчета равно

$$l^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2.$$

В штрихованной (движущейся) системе отсчета имеем

$$l'^2 = (X'_B - X'_A)^2 + (Y'_B - Y'_A)^2 + (Z'_B - Z'_A)^2.$$

Подставляя сюда соотношения

$$X'_B = X_B - V_x t; \quad Y'_B = Y_B - V_y t; \quad Z'_B = Z_B - V_z t$$

и аналогичные соотношения между штрихованными и нештрихованными координатами точки A, получим

$$l = l'. \tag{1.8}$$

Следовательно, это абсолютное понятие, оно не зависит от системы отсчета. Что касается времени, то оно здесь является некоторым параметром, который тоже не зависит от системы отсчета и который в разных системах отсчета один и тот же.

Таким образом, механика Ньютона вводит абсолютное понятие расстояния между точками в трехмерном пространстве и абсолютное время. Мы убедились ранее в инвариантности уравнений механики Ньютона относительно группы преобразований трехмерного пространства, что свидетельствовало о евклидовости пространства. Установим теперь этот факт и из анализа уравнений механики в форме Гамильтона—Якоби. Как известно из механики, функция Гамильтона выражается через функцию Лагранжа следующим образом:

$$H = p_k \dot{q}_k - L,$$

где $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ — обобщенный импульс.

Уравнения механики Гамильтона имеют симметричный вид:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{1.9}$$

Прежде чем перейти к уравнению механики в форме Гамильтона—Якоби, напомним сведения из теории уравнений в частных производных первого порядка. Если уравнение имеет вид

$$F(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = 0; \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \tag{1.10}$$

то уравнения характеристик для него представляются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial q_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial q_n}}. \tag{1.11}$$

Для получения уравнения Гамильтона—Якоби запишем систему уравнений Гамильтона (1.9) в виде

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial q_n}}. \tag{1.12}$$

Используя предыдущее, мы можем заменить эту систему уравнений уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \tag{1.13}$$

Это и есть уравнение Гамильтона—Якоби.

Для случая движения одной материальной точки (в декартовой системе координат) имеем

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0. \tag{1.14}$$

Если в этом уравнении перейти к криволинейным координатам, то будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\gamma^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = 0. \tag{1.15}$$

Величина γ^{ik} является метрическим тензором.

Расстояние между двумя соседними точками пространства выражается через этот тензор следующим образом (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

$$dl^2 = \gamma^{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \qquad (1.16)$$

Поскольку в декартовой системе координат метрический тензор диагонален:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1; \quad \gamma_{ik} = 0, \text{ если } i \neq k, \qquad (1.17)$$

то трехмерное пространство является евклидовым.

Таким образом, мы можем высказать общее утверждение: если для какой-то формы материи мы имеем законы ее движения в форме дифференциальных уравнений, то эти уравнения содержат и представления о структуре пространства и времени. Хотя это утверждение является естественным и общим, путь к нему был не совсем простой. И что удивительно? Он труднее оказался для физиков и легче был преодолен математиками-естествоиспытателями. Это объясняется прежде всего тем, что к этому времени в математике была глубоко разработана теория групп и инвариантов и изучалась группа движения пространства. Для физиков же того времени понятия инвариантности и группы были еще далеки.

Как мы видели, уравнения механики остаются форминвариантными при преобразовании Галилея, а следовательно, для всех механических процессов выполняется принцип относительности. Пуанкаре сформулировал этот принцип для всех физических явлений следующим образом [5]: «Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет».

Поскольку уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления, при преобразованиях Галилея изменяются, то делали вывод, что уравнения Максвелла не удовлетворяют принципу относительности. Делались попытки видоизменить эти уравнения таким образом, чтобы они при преобразованиях Галилея оставались неизменными. Такие новые уравнения написал Генрих Герц. Это привело к тому, что в уравнениях появились дополнительные члены, а следовательно, в природе должны были существовать новые электромагнитные процессы. Однако опыт этого не подтвердил. Сомнения в правильности уравнений Максвелла постепенно исчезли.

§ 2. Электродинамика Максвелла — Лоренца и единое пространство-время Минковского

Обобщая эксперименты и глубокие идеи Фарадея, Максвелл объединил магнитные, электрические и оптические явления и открыл свои знаменитые уравнения, которые для движущегося электрона в неподвижной координатной системе записаны Лоренцем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0;\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho;\\ \mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+\frac{\rho}{c}[\mathbf{vH}],\end{gathered}\tag{2.1}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля; ρ — объемная плотность электрона; $\mathbf{f}$ — электродинамическая сила, с которой поле действует на элемент объема электрона (сила Лоренца).

Эти уравнения называют уравнениями Максвелла — Лоренца. Они при преобразованиях Галилея не остаются неизменными. Отсюда, казалось бы, следует, что они не удовлетворяют принципу относительности. Однако это заключение неправильно. Преобразования Галилея и принцип относительности — это разные вещи. Преобразования Галилея получены из уравнений Ньютона как преобразования, оставляющие их инвариантными (форминвариантными) при переходе от неподвижной системы отсчета к системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью, и если уравнения Ньютона не всегда выполняются в природе и будут заменены другими законами механики, то и преобразования Галилея не должны обеспечивать инвариантность новых законов механики. Принцип относительности имеет более фундаментальный характер. Согласно ему, даже если уравнения Ньютона будут заменены другими уравнениями механики, никакими механическими явлениями нельзя показать, находитесь вы в покое или в равномерном и прямолинейном движении. Невозможность существования абсолютного движения является общим законом природы. Это значит, что и электромагнитные явления никогда не могут установить абсолютное движение. Опытные факты показали, что уравнения Максвелла—Лоренца хорошо описывают электромагнитные и оптические явления.

Рассмотрим две системы отсчета: одну систему отсчета K будем считать неподвижной, другую—K'—движущейся относительно первой вдоль оси X прямолинейно и равномерно со скоростью ε. Если принцип относительности справедлив и для электромагнитных явлений, то уравнения Максвелла—Лоренца как в неподвижной системе K, так и в движущейся K' должны иметь один и тот же вид, ибо только в этом случае все электромагнитные процессы будут протекать в системах K и K' одинаково при соответствующих начальных и граничных условиях.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы показать, что уравнения Максвелла—Лоренца инвариантны при переходе от одной системы отсчета K к другой K'. Эта задача впервые была поставлена и решена Анри Пуанкаре, который, следуя Лоренцу, показал, что если координаты и время преобразовать следующим образом (преобразования Лоренца):

$$X' = \gamma(X + \varepsilon T); \quad Y' = Y; \quad Z' = Z; \quad T' = \gamma(T + \varepsilon X)$$

(здесь скорость света принята равной единице) и при этом по тем же преобразованиям Лоренца преобразовать векторный и скалярный потенциалы ($\mathbf{A}$, φ):

$$A'_x = \gamma(A_x + \varepsilon\varphi); \quad A'_y = A_y; \quad A'_z = A_z;$$
$$\varphi' = \gamma(\varphi + \varepsilon A_x),$$

ток и плотность заряда:

$$\rho' v'_x = \gamma(\rho v_x + \varepsilon\rho); \quad \rho' v'_y = \rho v_y;$$
$$\rho' v'_z = \rho v_z; \quad \rho' = \gamma(\rho + \varepsilon\rho v_x),$$

а также силу Лоренца и работу в единицу времени:

$$f'_x = \gamma(f_x + \varepsilon\mathbf{f}\mathbf{v}); \quad f'_y = f_y; \quad f'_z = f_z;$$
$$\mathbf{f}'\mathbf{v}' = \gamma(\mathbf{f}\mathbf{v} + \varepsilon f_x),$$

то в системе K' мы будем иметь опять те же уравнения Максвелла—Лоренца, а следовательно, все электромагнитные явления протекают в системах K и K' одинаково при соответствующих начальных и граничных условиях. Именно на этом основании Пуанкаре отмечает [3]: «Две системы — одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно — представляют, таким образом, точное изображение одна другой».

Таким образом, принцип относительности для электромагнитных явлений следует из уравнений Максвелла — Лоренца как строгая математическая истина. Заметим, что из преобразований Лоренца сразу видно, что для начала новых координат $(X' = Y' = Z' = 0)$ имеем

$$X = -\varepsilon T.$$

Из этого следует, что начало координат системы отсчета K' движется вдоль оси X системы K с постоянной скоростью ε. Преобразования Лоренца связывают координаты и время (X', Y', Z', T') системы K' с координатами и временем (X, Y, Z, T) системы K. Пуанкаре установил, что преобразования Лоренца вместе со всеми пространственными вращениями образуют группу. Следует подчеркнуть, что из инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца тривиально следует выполнимость принципа относительности для электромагнитных явлений. Если законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца, то отсюда следует выполнимость принципа относительности для всех явлений природы. Часто встречающиеся в литературе утверждения, что в теории относительности необходимо отказаться от преобразований Галилея, просто неверны. Этими преобразованиями, если необходимо, всегда можно пользоваться. Однако, и это главное, они не оставляют уравнения Максвелла — Лоренца инвариантными. Как мы уже отмечали, механика Ньютона полностью подтвердила, что трехмерное пространство евклидово, а время абсолютно во всех инерциальных системах отсчета. Возникает вопрос: может ли изучение электромагнитных явлений позволить сделать нам дальнейший шаг в изучении пространства и времени? Ответ на этот вопрос утвердительный. Да, действительно, может. Откуда мы можем узнать о структуре пространства и времени? Прежде всего из изучения движения фронта электромагнитной волны или из изучения движения пробного материального тела со скоростью, близкой к скорости света.

Воспользуемся уравнениями Максвелла в свободном пространстве

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

и найдем уравнение для фронта электромагнитной волны. Когда мы говорим о фронте электромагнитной волны, то ясно себе представляем, что впереди него все компоненты поля равны нулю, а позади — некоторые отличны от нуля. Таким образом, если фронт волны существует, то на нем некоторые из компонент поля обязательно имеют разрыв. Если мы возьмем некоторую движущуюся в пространстве поверхность и зададим на ней поле, то в силу уравнений Максвелла мы можем найти производные от поля как на этой поверхности, так и на бесконечно близкой к ней. Для того чтобы были разрывы поля на поверхности, необходимо, чтобы поверхность удовлетворяла некоторому уравнению. Такие поверхности называются характеристиками. Следовательно, разрыв поля возможен лишь на характеристиках. Определим, следуя Фоку, уравнение характеристики для уравнений Максвелла. Пусть на поверхности

$$\omega(x, y, z, t) = ct - f(x, y, z) = 0 \tag{2.3}$$

задано электромагнитное поле. Так, например, для компоненты E_x имеем

$$E_x(x, y, z, t) = E_x\left(x, y, z, \frac{f}{c}\right) = E_x^0(x, y, z).$$

Возьмем производную от компонент поля по какой-либо координате на поверхности (2.3)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial E_x^0}{\partial x}.$$

Аналогичные соотношения можно получить и для других компонент электромагнитного поля. Комбинируя их, получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\left[\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right]=\operatorname{rot}\mathbf{H}^0; \qquad (2.4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{div}\mathbf{H}^0. \qquad (2.5)$$

Аналогично

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]=\operatorname{rot}\mathbf{E}^0; \qquad (2.6)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\operatorname{div}\mathbf{E}^0. \qquad (2.7)$$

Умножая выражения (2.4) и (2.6) скалярно на $\operatorname{grad}f$, учитывая уравнения поля, имеем

$$c\,(\operatorname{rot}\mathbf{H}^0\operatorname{grad}f)=\left(\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right);$$

$$c\,(\operatorname{rot}\mathbf{E}^0\operatorname{grad}f)=-\left(\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right).$$

Учитывая в выражениях (2.5) и (2.7) уравнения поля, получим

$$c\operatorname{div}\mathbf{H}^0=\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t};$$

$$c\operatorname{div}\mathbf{E}^0=\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Сравнивая эти выражения с предыдущими, найдем

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^0-(\operatorname{grad}f\operatorname{rot}\mathbf{H}^0)=0;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}^0+(\operatorname{grad}f\operatorname{rot}\mathbf{E}^0)=0.$$

Таковы условия, которым должны удовлетворять заданные функции $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$. Используя уравнения Максвелла, выражения (2.4) и (2.6) запишем в виде

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\left[\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right]=c\operatorname{rot}\mathbf{H}^0;$$

$$-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\left[\operatorname{grad}f\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]=c\operatorname{rot}\mathbf{E}^0.$$

Умножим эти уравнения векторно на $\operatorname{grad}f$ и, используя полученные ранее соотношения, а также уравнения поля, найдем с помощью известной формулы

$$[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab})$$

следующие уравнения:

$$[1-(\operatorname{grad} f)^2]\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \\ = \frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial t} - \left(\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial t}\right)\operatorname{grad} f + \left[\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t}\right];$$

$$[1-(\operatorname{grad} f)^2]\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t} - \left(\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t}\right)\operatorname{grad} f - \left[\operatorname{grad} f\,\frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial t}\right].$$

Здесь справа стоят известные функции. Если коэффициент $1-(\operatorname{grad} f)^2$ отличен от нуля, эти уравнения можно решить относительно производных по времени от функций поля, а следовательно, по написанным ранее формулам получим и для всех остальных первых производных от поля конечные значения. Таким образом, поле на поверхности (2.3) будет непрерывным. Чтобы на этой поверхности поле испытывало разрыв, необходимо обращение в нуль коэффициента при производных по времени. Это дает нам условие

$$(\operatorname{grad} f)^2 = 1.$$

Если записать уравнение поверхности для функции $w(x, y, z, t)$, то предыдущее уравнение для фронта электромагнитной волны примет вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = 0. \qquad (2.8)$$

Если перейти к произвольным допустимым координатам, то это уравнение запишется в форме

$$g^{ik}\,\frac{\partial w}{\partial x^k}\,\frac{\partial w}{\partial x^i} = 0; \quad x^0 = ct; \quad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \qquad (2.9)$$

Функция $g_{ik}(x)$, стоящая в уравнении для фронта волны, является метрическим тензором и определяет структуру пространства-времени. Поскольку g_{ik} мы получили из (2.8) с помощью произвольного допустимого преобразования координат, это означает, что всегда существует галилеева система координат, в которой метрический тензор g_{ik} во всем пространстве-времени имеет вид

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = -1; \quad g_{22} = -1; \quad g_{33} = -1; \quad g_{ik} = 0, \text{ если } i \neq k. \qquad (2.10)$$

С помощью метрического тензора квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками пространства-времени записывается следующим образом:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k; \quad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \qquad (2.11)$$

В системе координат, где компоненты метрического тензора определяются (2.10), имеем

$$ds^2 = c^2\, dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2.$$

Поскольку метрический тензор имеет значения (2.10), тензор кривизны данного пространства-времени R_{iklm} равен нулю*). Такое пространство-время называют псевдоевклидовым. Мы видим, таким образом, что уравнения Максвелла — Лоренца, описывающие электромагнитные явления, открыли нам, что пространство и время едино и геометрия его псевдоевклидова. Когда изучались электромагнитные явления и даже тогда, когда были открыты уравнения Максвелла — Лоренца, никто не предполагал, что они изменят сложившееся представление о пространстве и времени. Изучение электромагнитных явлений привело к открытию фундаментальной важности — пространство и время едино и геометрия его псевдоевклидова. Этим открытием мы в высшей степени обязаны Пуанкаре и Минковскому. Пуанкаре первый открыл, что величина (впоследствии называемая интервалом)

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

инвариантна относительно группы Лоренца.

Минковский [6] в 1908 г. выступил с докладом «Пространство и время» перед естествоиспытателями и врачами, которые тогда тоже интересовались этими проблемами. И вот что он сказал: «Милостивые господа! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции, и лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность». Дальше он говорит: «Сначала я намерен показать, как можно, исходя из ныне принятой механики, пожалуй, при помощи чисто математического рассуждения прийти к новым идеям относи-

*) См. определение (26.24)

тельно пространства и времени». И далее: «Уравнения ньютоновской механики обнаруживают двойную инвариантность. Их форма сохраняется, во-первых, тогда, когда положенную в основу пространственную координатную систему подвергают любому *изменению положения* (т. е. трехмерному преобразованию или повороту, или переносу — А. Л.), и во-вторых, тогда, когда состояние движения этой системы подвергается изменению, именно когда этой системе сообщается какое-нибудь *равномерное поступательное движение* (т. е. преобразование Галилея — А. Л.); нулевая точка времени также не играет никакой роли» (мы видели, что уравнения Ньютона инвариантны относительно смещения по времени — А. Л.).

Дальше он говорит: «Чувствуя себя подготовленными для перехода к аксиомам механики, мы привыкли считать аксиомы геометрии уже установленными раньше; поэтому эти две инвариантности, вероятно, редко формулируются вместе, так сказать, не переводя дыхания». И далее: «Каждая из них означает определенную замкнутую группу преобразований дифференциальных уравнений механики. Существование первой группы рассматривают как основной признак пространства. Ко второй группе охотнее всего относятся с презрением, с тем чтобы затем легкомысленно пройти мимо того обстоятельства, что, исходя из физических явлений, никогда нельзя решить, не находится ли все-таки пространство, предполагаемое покоящимся, в равномерном поступательном движении. Указанные две группы ведут, таким образом, обособленное существование. Их совершенно разнородный характер, вероятно, и препятствовал объединению. Но как раз объединенная полная группа, как целое, дает пищу для размышлений».

И вот далее: «Попытку перешагнуть через понятия пространства соответствующим образом в самом деле можно было бы расценить как некоторую дерзость математической мысли. Но после такого все-таки неизбежного шага для истинного понимания группы G_c (он имеет в виду группу уже в четырехмерном пространстве — А. Л.) термин «постулат относительности» для требования инвариантности по отношению к группе G_c кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название «постулат абсолютного мира».

Таким образом, хотя исторически уже с 1904 года, после опубликования работы [1], и были известны преобразования Лоренца, ни Лоренц, ни Эйнштейн не осознали того, что речь идет о едином пространстве-времени, определяемом единой геометрией и, по существу, Минковский, следуя Пуанкаре, глубоко осознал это. Вот этот качественный шаг в объединении пространства и времени в одно целое и введение соответствующей геометрии, по существу, и есть главное содержание специальной теории относительности. Часто люди, как правило, неглубоко разобравшиеся в этой теории, думают, что это ее математическая интерпретация. Нет, это и есть содержание специальной теории относительности.

Все физические процессы протекают в четырехмерном мире, т. е. в пространстве и времени, но геометрия этого пространства — псевдоевклидова. Геометрия мира, как известно, задается выражением для расстояния между двумя точками. В евклидовом мире это просто теорема Пифагора, в силу которой расстояние между двумя точками с декартовыми координатами (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) определяется выражением

$$l_{12}^2 = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2.$$

В четырехмерном мире время и координаты любого события (T, X, Y, Z) также задают нам мировую точку. Поэтому в четырехмерном мире (в пространстве-времени) мы можем ввести понятие расстояния между двумя мировыми точками, называемое интервалом, но здесь оно в декартовых координатах имеет уже несколько иной вид:

$$s_{12}^2 = c^2 (T_1 - T_2)^2 - (X_1 - X_2)^2 - (Y_1 - Y_2)^2 - (Z_1 - Z_2)^2 = \\ = c^2 (T_1 - T_2)^2 - l_{12}^2. \quad (2.12)$$

Так как в выражение (2.12) пространственная и временная части входят с разными знаками, то Клейн и Гильберт предложили такое пространство называть псевдоевклидовым.

Выражение (2.12) для интервала не следует из каких-либо более общих принципов. Оно само выражает фундаментальный принцип современной физики — пространство и время едино, и геометрия его определяется интервалом (2.12). Бесконечно малый интервал между двумя событиями

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \qquad (2.13)$$

является инвариантом в этом четырехмерном мире.

Минковский понял, что суть теории относительности, именно специальной теории относительности, в том, что все физические процессы протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова. Такого понимания сути специальной теории относительности у Эйнштейна в то время еще не было. Об этом, в частности, свидетельствует его мнение о работах математиков по теории относительности [7]: «С тех пор, как на теорию относительности навалились математики, я сам перестал ее понимать!». Однако к моменту создания общей теории относительности Эйнштейн уже осознал все величие открытия Минковского и очень высоко отозвался о его работах [8, с. 559], «...без которых общая теория относительности..., быть может, оставалась бы в зачаточном состоянии».

Название «теория относительности» (или позднее — специальная теория относительности) не является удачным. Исторически оно возникло давно, в начале нашего века, поэтому нет смысла от него отказываться и сейчас, но необходимо понимать, в чем главное содержание теории. Теория относительности это не какая-то туманная философия об относительности. Это — теория пространства-времени. Изучение различных форм материи, ее законов движения является в то же время и изучением пространства-времени. Хотя сама структура пространства-времени и открылась нам в результате изучения материи, иногда мы говорим о пространстве-времени как об арене, на которой развиваются те или иные явления. При этом мы не совершим ошибку, если будем помнить, что эта арена не существует сама по себе без материи.

Иногда говорят, что пространство-время (мир Минковского) задано априорно, поскольку его структура не изменяется под действием материи. Конечно, те представления о пространстве-времени, которые возникли в естествознании, являются определенной ступенью наших знаний о природе, но даже и в этом случае пространство-время неотделимо от материи и не существует априорно.

Теперь можно еще раз поставить вопрос о принципе относительности. Суть его такова: для всех физических явлений, а не только для механических, протекающих в какой-то инерциальной системе координат, никакими физическими опытами невозможно определить, находится эта система в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения. Этот принцип есть частное проявление того, что все физические процессы протекают в пространстве-времени с метрикой (2.12).

Константа c, входящая в интервал (2.12), берется из эксперимента (фактически она та же, что и в уравнениях Максвелла). По существу, c является предельной скоростью распространения всякого взаимодействия. На этом вопросе мы остановимся позднее.

Поскольку геометрия пространства-времени определяется выражением (2.13), а ds^2 является инвариантом, величина которого не зависит от выбора системы координат, то мы сразу же приходим к утверждению об относительности расстояния и относительности времени.

Действительно, так как инвариантом является именно четырехмерный интервал, связанный и с координатами, и со временем, величина отрезка в трехмерном пространстве в общем случае уже не будет инвариантом, а следовательно, в разных системах отсчета она будет различной и, таким образом, понятие длины трехмерного отрезка не будет иметь абсолютного характера. Отсюда следует также и фундаментальный вывод об относительности временных промежутков в различных системах отсчета, впервые установленный Эйнштейном [4].

Следует отметить, что довольно часто понятие инвариантности употребляют в значениях, соответствующих понятиям ковариантности или форминвариантности. Поэтому напомним определения этих понятий и укажем на их различие.

Уравнение называется ковариантным при некотором преобразовании координат, если новые неизвестные функции, входящие в него, выраженные в новых переменных, будут удовлетворять уравнениям того же вида, что и старые функции в старых переменных. Таким образом, требование ковариантности уравнений не является отражением какого-либо принципа, а является математическим требованием.

Как показано Фоком [9], для того чтобы какое-либо уравнение было ковариантным, достаточно, чтобы при произвольных допустимых преобразованиях координат оно преобразовывалось по тензорному закону. Поясним это примером. Уравнения релятивистской механики

$$\frac{DU^i(x)}{Ds} = F^i(x) \tag{2.14}$$

ковариантны, так как в силу тензорного характера при произвольном допустимом преобразовании координат

$$x'^i = x'^i(x^m) \tag{2.15}$$

новые функции, выраженные в новых переменных $U'^i(x')$, будут удовлетворять уравнению того же вида, что и исходное уравнение (2.14)

$$\frac{D'U'^i(x')}{D's} = F'^i(x'),$$

т. е. при переходе от координат x к координатам x' все величины в уравнении (2.14) заменяются на соответствующие штрихованные величины.

При этом следует особо подчеркнуть, что функциональная зависимость метрического тензора пространства-времени g'_{ni} от новых координат при преобразованиях (2.15), вообще говоря, может меняться. Это означает, что если в первоначальной системе отсчета метрический тензор g_{ni} был одной функцией от координат x, то в штрихованной системе координат он может быть совершенно другой функцией от координат x'. Поскольку в ковариантные уравнения всегда входит метрический тензор пространства-времени или его производные, то и функциональная зависимость (функциональная форма) ковариантных уравнений от новых координат при преобразовании (2.15) в общем случае изменяется.

В этом легко убедиться, если учесть, что при преобразованиях координат (2.15) метрический тензор пространства-времени преобразуется по закону

$$g'_{ni}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^n}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i} g_{lm}(x(x')).$$

Таким образом, что вполне естественно, функциональная зависимость ковариантных уравнений от новых координат при преобразованиях (2.15) не сохраняется, а поэтому в различных системах координат описание явлений различно, т. е. в общем случае явления в разных системах координат будут протекать различным образом.

Требование форминвариантности метрики при некоторых преобразованиях координат (т. е. неизменности функциональной зависимости метрического тензора при этом преобразовании) является более жестким, чем требование ковариантности уравнений. Это требование ограничивает класс координатных систем лишь такими, преобразования между которыми оставляют функциональную форму метрического тензора пространства-времени неизменной: функциональная зависимость тензора g_{ni} от координат x в одной системе отсчета является той же самой, что и зависимость тензора g'_{ni} от координат x' в любой другой системе отсчета из этого класса.

Однако данное требование гарантирует, что для всей группы преобразований, оставляющих метрику форминвариантной, функциональная зависимость уравнений поля от новых координат будет неизменной. Поэтому во всех системах отсчета, преобразования между которыми оставляют метрику форминвариантной, все физические явления будут протекать одинаковым образом, так что мы не сможем установить, в какой именно из этих систем отсчета находимся.

Таким образом, ковариантность и форминвариантность являются разными понятиями. Преобразования, обеспечивающие ковариантность уравнений поля, в общем случае включают преобразования между различными допустимыми, но неравноправными для описания физических явлений системами отсчета. В противоположность этому, преобразования, обеспечивающие форминвариантность метрического тензора пространства-времени (а следовательно, и форминвариантность ковариантных уравнений), включают преобразования только между эквивалентными, с физической точки зрения, системами отсчета: в этих системах все физические явления протекают одинаковым образом при соответственных начальных и граничных условиях. А так как существование или отсутствие группы таких преобразований целиком предопределяется характером геометрии пространства-времени, то отсюда следует, что специальный принцип относительности, по существу, представляет собой лишь тривиальное проявление псевдоевклидовой геометрии физического пространства-времени, не более. Поэтому и объяснение или получение этого принципа на основе каких-то особых постулатов не отражает существа проблемы. Однако обычно при формулировке специальной теории относительности такие постулаты рассматриваются в качестве краеугольного камня теории. В частности, вводят постулат «постоянства скорости света», утверждая, что свет распространяется в пустоте с определенной скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела.

Далее, опираясь на это положение, определяют процедуру синхронизации часов, находящихся в различных точках пространства A и B, путем обмена световыми сигналами. Наглядно эту процедуру можно представить себе следующим образом: из точки A в некоторый момент времени t_A по «A-часам» посылается в точку B световой сигнал. Он приходит в точку B в момент времени t_B по «B-часам», отражается в ней и возвращается в точку A в момент времени t'_A по «A-часам». По определению, часы, находящиеся в точках A и B, будут синхронизованы, если имеет место равенство

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \tag{2.16}$$

Это равенство легко получить, используя постулат «постоянства скорости света». Действительно, если расстояние между точками A и B обозначить через R, то в момент прихода светового сигнала в точку B показание часов, находящихся в ней и синхронизованных с часами A, должно быть равно

$$t_B = t_A + \frac{R}{c}.$$

Совершенно аналогично в момент возвращения светового сигнала в точку A ее часы должны показывать время

$$t'_A = t_B + \frac{R}{c}.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим условие синхронизации (2.16). Из этого условия имеем

$$t_B = \frac{1}{2}(t_A + t'_A) = t_A + \varepsilon(t'_A - t_A),$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Введенная таким образом синхронизация часов позволяет говорить об «одновременности» событий, происходящих в разных точках пространства.

Дальнейшие соображения обычно опираются на принцип относительности: требуют, чтобы закон распространения сферической световой волны не зависел от того, в какой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, происходит описание процесса распространения. Тогда, полагая, что сферическая волна испускается в момент времени $t = t' = 0$ из общего в этот момент для обеих систем отсчета начала координат, скорость света в одной системе отсчета определяют выражением

$$c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2}, \tag{2.17}$$

а в другой —

$$c^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2}, \tag{2.18}$$

причем координаты (x, y, z, t) и (x', y', z', t') связываются между собой преобразованием Лоренца. В частном случае распространения света из начала координат вдоль оси x формулы (2.17) и (2.18) дают

$$c = \frac{x}{t}, \quad c = \frac{x'}{t'}.$$

Однако такой подход к построению теории относительности неоднозначен и несколько формален, поскольку здесь с самого начала не анализируется, что такое расстояние между точками пространства, да и понятие времени связано с определенной синхронизацией часов. Впервые на некоторые из этих вопросов обратил внимание Рейхенбах [10]. Он выдвинул общее условие синхронизации в форме

$$t_B = t_A + \varepsilon(t'_A - t_A), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Условие синхронизации Эйнштейна имеет место при $\varepsilon = 1/2$. Подход Рейхенбаха можно было бы сейчас изложить следующим образом.

Во-первых, ниоткуда не следует, что скорость света в одном направлении должна быть равна скорости света в противоположном направлении. Пусть, например, в положительном направлении оси x скорость света равна c_1, а в противоположном направлении — c_2. Тогда в момент прихода светового сигнала в точку B показание часов, находящихся в ней, должно быть равно

$$t_B = t_A + \frac{X_{AB}}{c_1}, \tag{2.19}$$

где X_{AB} — расстояние между точками A и B. Совершенно аналогично возвращение сигнала в точку A по «A-часам» должно произойти в момент времени

$$t'_A = t_B - \frac{X_{AB}}{c_2}; \quad (c_2 < 0). \tag{2.20}$$

Вычитая из выражения (2.20) выражение (2.19), получим

$$t'_A - t_B = t_B - t_A - X_{AB}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right).$$

Складывая их, имеем

$$X_{AB} = (t'_A - t_A)\frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1}.$$

Подставляя это соотношение в предыдущее, получим окончательно

$$t_B = t_A + \varepsilon(t'_A - t_A),$$

где $\varepsilon = \frac{c_2}{c_2 - c_1}$. Поскольку скорости света c_1 и c_2 могут принимать любые постоянные значения (и в частности, сколь угодно большие) в общем случае мы приходим к синхронизации Рейхенбаха:

$$t_B = t_A + \varepsilon(t'_A - t_A); \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Таким образом, произвол в синхронизации часов, отмеченный Рейхенбахом, показывает, что путь построения теории относительности, избранный Эйнштейном, является не однозначным. Это обстоятельство внесло путаницу в понимание сущности теории относительности, особенно в выделение в ней главного и второстепенного. После Рейхенбаха вопросы синхронизации часов обсуждались Мандельштамом [11] и в последнее время Тяпкиным [12].

Однако мнение, что центральным пунктом специальной теории относительности является понятие одновременности, глубоко ошибочно. Понятие одновременности основано на процедуре синхронизации часов. Синхронизация же часов, как показал Рейхенбах, может быть достаточно произвольной. Она является простым следствием того или иного выбора координатной системы. Более того, существуют такие координатные системы (например, ускоренные), в которых синхронизация часов не может быть осуществлена, хотя описание физических процессов в такой системе возможно и в рамках специальной теории относительности.

Из предыдущего следует, что постулат о постоянстве скорости света (как он определен Эйнштейном) в общем случае произвольной синхронизации часов не выполняется, поэтому возникает ряд вопросов.

Как определить физическое время в случае синхронизации часов по Рейхенбаху? Как определить физическое расстояние между двумя точками пространства в этом случае? Какова же предельно допустимая скорость распространения сигналов?

Для того чтобы ответить на все эти вопросы, необходимо понять сущность теории относительности. Без такого понимания невозможно получить правильные ответы на эти и другие вопросы. Именно из-за отсутствия понимания главного в специальной теории относительности в ряде монографий и учебников бытует до сих пор неправильное утверждение о неприменимости специальной теории относительности к описанию явлений в неинерциальных системах отсчета и необходимости применения в этом случае общей теории относительности, о конвенциальном характере ряда понятий физики. Разъяснению всех этих вопросов и посвящены настоящие лекции.

§ 3. Преобразования Лоренца

Механика Ньютона, как мы теперь знаем, вновь установила, что геометрия нашего трехмерного мира евклидова, а время абсолютно. Сюрприз преподнесла электродинамика: из нее следует, что (если над ней всерьез задуматься) пространство и время объединены в одну геометрию (четырехмерную) и что эта геометрия — псевдоевклидова (с метрикой (2.10)). А когда задана геометрия пространства, то в этом пространстве можно вводить различные системы координат. Рассматриваемую до сих пор систему координат (ct и $\mathbf{r}$ — три декартовы координаты), приводящую к метрике (2.13), мы будем называть галилеевой системой координат. Однако при описании физических процессов, вообще говоря, можно пользоваться и другими координатными системами, но из класса так называемых допустимых. Определение допустимых систем координат будет дано позднее.

Теперь посмотрим, как возникают преобразования Лоренца. Возьмем выражение для интервала в галилеевой системе координат

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \tag{3.1}$$

и совершим преобразования Галилея:

$$x = X - vT; \quad t = T; \quad y = Y; \quad z = Z. \tag{3.2}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$X = x + vt; \quad T = t; \quad Y = y; \quad Z = z, \tag{3.3}$$

где X, Y, Z, T — галилеевы координаты.

Взяв дифференциалы от обеих частей равенств (3.3) и подставив dT, dX, dY, dZ в выражение для интервала (3.2), получим

$$ds^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2v\,dx\,dt - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3.4}$$

Мы видим, что в правой части соотношения (3.4) возник перекрестный член $dx\,dt$. От него мы можем избавиться. Для этого выделим в выражении (3.4) полный квадрат.

В результате интервал (3.4) примет вид

$$ds^2 = c^2\left[dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]^2 - \frac{dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2. \tag{3.5}$$

Таким образом, мы видим, что выражение (3.5) для интервала ds^2 состоит из двух частей: положительной и отрицательной. Положительная часть в этом интервале будет иметь времениподобный характер, а отрицательная часть — пространственноподобный.

А теперь давайте введем новое время

$$T' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

и новые координаты

$$X' = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad Y' = y; \quad Z' = z. \tag{3.7}$$

Тогда выражение (3.5) для интервала в этих переменных будет иметь точно такой же вид, как и в выражении (2.13), только дифференциалы координат и времени будут со штрихами:

$$ds^2 = c^2\, dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2. \tag{3.8}$$

В результате два последовательных преобразования (3.2) и (3.6)—(3.7) оставляют метрику форминвариантной. Подставляя выражения (3.2) в (3.6) и (3.7), получим хорошо известные преобразования Лоренца

$$T' = \frac{T - \frac{vX}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad X' = \frac{X - vT}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$
$$Y' = Y; \quad Z' = Z. \tag{3.9}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$T = \frac{T' + \frac{vX'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad X = \frac{X' + vT'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$
$$Y = Y'; \quad Z = Z'. \tag{3.10}$$

Таким образом, я ввел новое понятие времени (T') и новую координату (X'), так что выражение для интервала опять приняло диагональный характер. Вы можете спросить, почему время и координаты в выражении (2.13) одни, а в выражении (3.8) — другие, и что же считать временем, а что координатой? Подробнее я специально остановлюсь на этом позже, а сейчас скажу, что все физические процессы можно описывать в любых допустимых координатах (t, x, y, z) и это описание будет таким же полноценным, как, скажем, в координатах (T, X, Y, Z). Однако при этом величины (t, x, y, z) уже будут координатными величинами, не связанными непосредственно с физическими величинами. Поясню это следующим простым примером. Как вы знаете, в трехмерном пространстве мы можем равноправно использовать декартовы (X, Y, Z), цилиндрические (r, φ, z) и сферические (ρ, θ, φ) координаты. Вид же квадрата дифференциала расстояния между двумя бесконечно близкими точками трехмерного пространства, записанный в этих системах координат, будет разный:

$$d\mathbf{R}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2;$$
$$d\mathbf{R}^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dz^2;$$
$$d\mathbf{R}^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

Сюда уже входят не только дифференциалы длины, но, скажем, и дифференциалы углов, причем каждый раз стоит какая-то функция соответствующих координат — это так называемые метрические коэффициенты. И только дифференциалы вместе со своими метрическими коэффициентами могут вам дать физические величины. Сами по себе дифференциалы четырех координат в общем случае никакого физического смысла не имеют, т. е. они непосредственно не связаны ни с расстоянием между двумя точками в трехмерном пространстве, ни с временным ходом процессов.

Давайте теперь сформулируем некоторые выводы.

Форминвариантность. В приведенном выше примере мы специально позаботились о форминвариантности интервала: сначала мы подставили в ds^2 преобразования (3.3) старых координат через новые, потом выбрали в подвижной системе координат новый набор переменных (3.6)—(3.7), и в результате интервал в штрихованной системе координат получился точно таким же по форме, как и в нештрихованной. В случае псевдоевклидовой геометрии форминвариантность интервала реализуется всегда, а вот в случае более сложных геометрий это, в принципе, не всегда может иметь место. Поскольку при преобразованиях, оставляющих метрику форминвариантной, все уравнения физики (механики, электродинамики и т. д.) остаются форминвариантными, то при этом и функциональная зависимость уравнений поля от новых координат будет неизменной. Поэтому во всех системах координат, преобразования между которыми оставляют метрику форминвариантной, все физические явления, описываемые этими уравнениями, будут протекать одинаковым образом—так, что мы не сможем никаким экспериментом установить, в какой именно из этих систем отсчета мы находимся. Таким образом, форминвариантность интервала (3.1) при последовательном применении преобразований (3.3), (3.6) и (3.7) гарантировала нам, что все системы координат, связанные результирующим преобразованием (3.9), являются физически тождественными: никаким физическим экспериментом нельзя отличить одну из этих систем от другой.

Таким образом, принцип относительности Галилея является частным следствием того, что геометрия пространства-времени является псевдоевклидовой. Из уравнений Максвелла—Лоренца, как мы убедились ранее, точно следует, что пространство-время едино и геометрия его псевдоевклидова. Это утверждение есть строгая математическая истина. Таким образом, изучение электромагнитных явлений привело к открытию структуры пространства-времени. Это, в свою очередь, позволило выдвинуть гипотезу, что и для других физических процессов пространство-время псевдоевклидово.

Поэтому *сущность теории относительности* (специальной теории относительности) состоит в следующем (это постулат): *физические процессы протекают в четырехмерном пространстве* (ct и пространственные координаты), *геометрия которого псевдоевклидова*. Принцип относительности есть частное проявление этого фундаментального постулата, не более.

Абсолютное значение величины интервала. Я еще раз подчеркну: если мы взяли интервал (3.1), который является инвариантом, то расстояние между двумя точками в трехмерном пространстве и время между двумя событиями уже сами по себе не являются понятиями абсолютными (как это было в механике Ньютона). Специальная теория относительности низвергла их абсолютизм и сделала их относительными понятиями. Абсолютен интервал. Он может быть и положительно, и отрицательно определенным, а для светового луча равен нулю. Если назвать $ds^2 > 0$ времениподобным интервалом, $ds^2 < 0$ — пространственноподобным интервалом, $ds^2 = 0$ — световым (изотропным) интервалом, то эти понятия тоже абсолютны. И поэтому всякого рода преобразования координат не могут нарушить этого абсолютизма.

Ранее мы нашли формулы преобразования Лоренца для случая, когда движение одной системы координат относительно другой происходило с постоянной скоростью вдоль оси X. В заключение этого параграфа мы найдем формулы преобразования для произвольной постоянной скорости $\mathbf{v}$.

Обозначим через X, Y, Z компоненты вектора $\mathbf{R}$. Совершим преобразование Галилея:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{v}T; \quad t = T.$$

Выражение для интервала (2.11) примет в этих переменных следующий вид:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\mathbf{v}\, d\mathbf{r}\, dt - d\mathbf{r}^2.$$

Введем обозначение

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Тогда выражение для интервала можно записать в виде

$$ds^2 = c^2 \left[\frac{1}{\gamma}\, dt - \frac{\gamma}{c^2}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{r}\right]^2 - d\mathbf{r}^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{v}\, d\mathbf{r})^2.$$

Наша основная цель — найти такие новые переменные T' и $\mathbf{R}'$, в которых полученное выше выражение для интервала можно записать в диагональной форме:

$$ds^2 = c^2 (dT')^2 - (d\mathbf{R}')^2.$$

Введем новое время T':

$$T' = t\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{c^2}\, \mathbf{v}\mathbf{r}.$$

Выражая правую часть с помощью преобразования Галилея через переменные T и $\mathbf{R}$, имеем

$$T' = \gamma\left(T - \frac{\mathbf{vR}}{c^2}\right).$$

Отрицательную часть интервала также выразим через переменные T и $\mathbf{R}$:

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 =$$
$$= (d\mathbf{R})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})^2 - 2\gamma^2\mathbf{v}\,d\mathbf{R}\,dT + \gamma^2 v^2 (dT)^2.$$

Легко убедиться в том, что первые два члена можно записать в виде квадрата некоторого вектора:

$$(d\mathbf{R})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})^2 = \left[d\mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})}{v^2}\right]^2.$$

Следовательно,

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 =$$
$$= \left[d\mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})}{v^2}\right]^2 - 2\gamma^2\mathbf{v}\,d\mathbf{R}\,dT + \gamma^2 v^2 (dT)^2,$$

но правая часть есть квадрат вектора

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 = \left[d\mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,d\mathbf{R})}{v^2} - \gamma\mathbf{v}\,dT\right]^2.$$

Таким образом, пространственноподобная часть интервала принимает диагональный вид:

$$(d\mathbf{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\,d\mathbf{r})^2 = (d\mathbf{R}')^2,$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{vR})}{v^2} - \gamma\mathbf{v}T.$$

Итак, мы получили формулы преобразования координат и времени для общего случая движения с постоянной скоростью $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} T' &= \gamma\left(T - \frac{(\mathbf{vR})}{c^2}\right); \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{R} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{vR})}{v^2} - \gamma\mathbf{v}T, \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Используя преобразования Лоренца (3.9), легко получить формулы для сложения скоростей. Для этой цели продифференцируем (3.9) по переменной T:

$$\frac{dT'}{dT}=\frac{1-\frac{vV_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad V'_x\frac{dT'}{dT}=\frac{V_x-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$V'_y\frac{dT'}{dT}=V_y; \quad V'_z\frac{dT'}{dT}=V_z.$$

Подставляя первое выражение в последующие, получим

$$V'_x=\frac{V_x-v}{1-\frac{vV_x}{c^2}}; \quad V'_y=\frac{V_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vV_x}{c^2}}; \quad V'_z=\frac{V_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vV_x}{c^2}}. \tag{3.12}$$

Эти формулы впервые содержались уже в работе Пуанкаре [3].

Аналогично можно получить сложение скоростей и в общем случае. Для этой цели продифференцируем формулы (3.11) по переменной T:

$$\frac{dT'}{dT}=\gamma\left(1-\frac{(\mathbf{v}\mathbf{V})}{c^2}\right);$$

$$\mathbf{V}'\frac{dT'}{dT}=\mathbf{V}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{V})}{v^2}-\gamma\mathbf{v}.$$

Подставляя первое выражение во второе, получим

$$\mathbf{V}'=\frac{\mathbf{V}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{V})}{v^2}-\gamma\mathbf{v}}{\gamma\left[1-\frac{(\mathbf{v}\mathbf{V})}{c^2}\right]}. \tag{3.13}$$

Покажем теперь, что скорость одного тела по отношению к другому всегда меньше скорости света. Пусть, например, в некоторой инерциальной системе отсчета скорость первого тела равна $\mathbf{v}$, а второго $\mathbf{V}$. Возьмем систему отсчета, в которой скорость первого тела равна нулю, тогда в этой системе отсчета скорость второго тела будет $\mathbf{V}'$. Скорость $\mathbf{V}'$ и является относительной скоростью второго тела относительно первого. В этом легко убедиться, используя формулу

$$V'^2 = \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{V}]^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{3.14}$$

С помощью этого выражения получим следующее равенство:

$$1 - \frac{V'^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{3.15}$$

Отсюда, в частности, следует, что если

$$v^2 < c^2 \quad \text{и} \quad V^2 < c^2,$$

то и относительная скорость V' всегда меньше скорости света. Если относительная скорость двух тел бесконечно мала:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + d\mathbf{V},$$

то с помощью формулы (3.14) можно получить квадрат длины между двумя близкими точками в пространстве скоростей:

$$ds^2 = \frac{(c^2-v^2)(d\mathbf{V})^2 + (\mathbf{V}\,d\mathbf{V})^2}{(c^2-v^2)^2}c^2. \tag{3.16}$$

Полученное пространство скоростей является пространством Лобачевского. Все свойства этого пространства определяются выражением (3.16).

§ 4. Относительность времени и сокращение длины

Рассмотрим случай времениподобного интервала:

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = \\ = c^2 dT'^2 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2 > 0.$$

Это выражение можно записать в виде

$$c^2 dT^2 - d\mathbf{R}^2 = c^2 dT'^2 - d\mathbf{R}'^2 > 0.$$

Так как интервал в рассматриваемом случае больше нуля, то существует такая система координат (скажем, штрихованная), в которой два бесконечно близких события происходят в одной точке пространства ($d\mathbf{R}'=0$). Тогда пространственно-временной интервал сводится к разности только времен в штрихованной системе:

$$c^2\,dT'^2=c^2\,dT^2\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{R}}{dT}\right)^2\right]=c^2\,dT^2\left[1-\frac{\mathbf{v}^2(T)}{c^2}\right],$$

где введена скорость $\mathbf{v}(T)=\frac{d\mathbf{R}}{dT}$. Отсюда можно определить, как связано изменение времени в штрихованной системе с изменением в нештрихованной для процесса, локализованного в штрихованной системе отсчета:

$$dT'=dT\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2(T)}{c^2}};$$

$$T_2'-T_1'=\int\limits_{T_1}^{T_2}\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2(T)}{c^2}}\,dT. \tag{4.1}$$

Это выражение и служит проявлением относительности времени Эйнштейна. Именно Эйнштейн впервые получил эту формулу.

Надо сказать, что Лоренц, открыв свои знаменитые преобразования, полностью не осознал их значение, и следующий решительный шаг к построению специальной теории относительности сделали независимо друг от друга, но разными путями Пуанкаре и Эйнштейн. Первый — с точки зрения математического изучения групповых свойств четырехмерного пространства, второй — с помощью операционного анализа относительности времени. При этом, как отметил В. Паули [13] на конференции, посвященной 50-летию теории относительности: «И Эйнштейн, и Пуанкаре опирались на подготовительные работы Г. А. Лоренца, весьма близко подошедшего к окончательному результату, но не сумевшего сделать последний решительный шаг. В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл гармонии математического метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта».

Однако окончательную формулировку и самое глубокое понимание того, что мы имеем здесь дело с единой геометрией пространства-времени, следуя Пуанкаре, дал Минковский. Пуанкаре и Минковский открыли нам геометрию пространства-времени, а именно—псевдоевклидову геометрию.

Возьмем другой пример, когда интервал между двумя событиями пространственноподобный: $ds^2 < 0$. В этом случае существует такая система отсчета, в которой эти два события одновременны: $dT' = 0$. Если эти события происходят в точках, лежащих на оси X, тогда пространственно-временной интервал будет иметь вид

$$ds^2 = -dX'^2, \tag{4.2}$$

т. е. сводится к чисто пространственному расстоянию. В любой другой системе отсчета имеем

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2. \tag{4.3}$$

Вводя обозначения для длин отрезков, соединяющих точки, в которых происходят эти события,

$$dl_0^2 = dX^2; \quad dl^2 = dX'^2,$$

и приравнивая выражения (4.2) и (4.3), получим

$$c^2\,dT^2 + dl^2 = dl_0^2. \tag{4.4}$$

Отсюда непосредственно следует, что длина отрезка dl в штрихованной системе отсчета меньше длины отрезка dl_0 в нештрихованной системе отсчета: $dl < dl_0$. Используя обратные преобразования Лоренца (3.10), найдем, что

$$dT = \frac{dT' + \frac{v}{c^2}\,dX'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4.5}$$

Поскольку $dT' = 0$, то, подставляя выражение (4.5) в соотношение (4.4), получим

$$dl = dl_0\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4.6}$$

Мы видим, что это сокращение длины есть не что иное, как следствие структуры геометрии четырехмерного пространства-времени и способа измерения длины движущегося отрезка.

Следует отметить, что это сокращение длины, в отличие от обычно принятой точки зрения, не является сокращением Лоренца—Фицджеральда.

Разобранные примеры показывают нам, что интервал в четырехмерном мире не есть нечто абстрактное, что он вполне измерим. Если интервал времениподобный, мы всегда можем выбрать надлежащую систему координат и измерить его с помощью часов. Если интервал пространственноподобный, то, аналогично, выбрав соответствующую систему координат, измерим его с помощью линейки.

Давайте дадим теперь более общий и более полный анализ измерения длин отрезков и промежутков времени в инерциальных системах отсчета. Заметим сначала, что в каждой системе отсчета есть свое понятие длины отрезка, не обязательно предполагающее одновременное определение координат начала и конца отрезка. Наиболее наглядно это проявляется тогда, когда наблюдатель с линейкой покоится относительно измеряемого отрезка. В этом случае он может в момент времени T_1 посмотреть на начало отрезка и установить, что оно совпадает с делением X_1 линейки, а в момент $T_2 > T_1$ зафиксировать, что конец отрезка совпадает с делением $X_2 > X_1$ линейки. И, хотя показания X_1 и X_2 линейки взяты не одновременно ($T_2 - T_1 > 0$), длина отрезка, тем не менее, будет равна

$$l = X_2 - X_1.$$

Предположим теперь, что у нас имеются две инерциальные системы отсчета, движущиеся относительно друг друга со скоростью V, одну из которых условно назовем штрихованной, а другую — нештрихованной. Выберем далее в этих системах отсчета координаты (X, Y, Z, T) и (X', Y', Z', T') таким образом, чтобы, во-первых, метрика в них принимала вид (3.1) и (3.8) соответственно и, во-вторых, координатные оси в этих системах отсчета имели бы одинаковое направление. Не ограничивая общности, будем считать также, что относительная скорость V направлена вдоль оси X. Тогда координаты и время в этих системах отсчета будут связаны преобразованиями Лоренца (3.9) и (3.10).

Рассмотрим теперь какие-либо два события, координаты которых в нештрихованной системе отсчета следующие: (X_1, Y_1, Z_1, T_1) и (X_2, Y_1, Z_1, T_2). Для определенности будем считать, что $X_2 > X_1$, $T_2 > T_1$. Используя преобразования Лоренца (3.9), легко получить, что в штрихованной системе отсчета справедливы соотношения

$$X_2'-X_1'=\frac{X_2-X_1-V(T_2-T_1)}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$T_2'-T_1'=\frac{T_2-T_1-\frac{V}{c^2}(X_2-X_1)}{\sqrt{1-V^2/c}}.$$

Вводя обозначение

$$w=\frac{X_2-X_1}{T_2-T_1}\geqslant 0, \tag{4.7}$$

эти соотношения можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_2'-X_1'&=(X_2-X_1)\frac{1-V/w}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\\ T_2'-T_1'&=(T_2-T_1)\frac{1-Vw/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Величина интервала между событиями будет равна

$$s_{12}^2=c^2(T_2-T_1)^2-(X_2-X_1)^2. \tag{4.9}$$

Рассмотрим следующие два случая:

а) Пусть $s_{12}^2<0$.

В этом случае точка (X_2, Y_1, Z_1, T_2) находится вне светового конуса и $w>c$ в силу соотношений (4.7) и (4.9). Тогда $1-V/w>0$, и если $X_2-X_1>0$, то из первого выражения (4.8) следует, что $X_2'-X_1'>0$. Однако, хотя величина $X_2'-X_1'$ и является в этом случае знакоопределенной, длина отрезка $l'=X_2'-X_1'$ в штрихованной системе отсчета не обязательно будет сокращаться, а может быть и увеличенной по сравнению с длиной этого отрезка в нештрихованной системе отсчета.

Из формул (4.8), в частности, следует, что для двух событий, для которых величина w в нештрихованной системе отсчета удовлетворяет неравенству

$$w>\frac{c^2}{V}\left(1+\sqrt{1-V^2/c^2}\right),$$

длина отрезка в штрихованной системе всегда будет больше длины отрезка в нештрихованной системе отсчета. Для интервалов, у которых

$$\frac{w}{c}\geqslant 1,$$

имеем

$$(X_2'-X_1')=\frac{(X_2-X_1)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Для двух других событий, таких, что величина w удовлетворяет неравенству

$$c<w<\frac{c^2}{V}\left(1+\sqrt{1-V^2/c^2}\right),$$

длина отрезка в штрихованной системе всегда будет меньше длины отрезка в нештрихованной системе отсчета.

Таким образом, длины отрезков разных пространственноподобных интервалов, расположенных вдоль оси X в системе K, ведут себя с точки зрения системы отсчета K' по-разному: одни увеличиваются, другие сокращаются, поэтому, когда говорят о сокращении стержня при движении, это утверждение неправильно.

Заметим, что для двух событий, для которых

$$w=\frac{1+\sqrt{1-V^2/c^2}}{V}\,c^2,$$

длина отрезка не изменяется, а промежуток времени изменяет знак. Когда мы говорим о сокращении длины, то всегда должны иметь в виду, что сравниваем длины стержня в какой-либо системе отсчета с длиной стержня, измеренного в другой системе отсчета в один и тот же момент времени. Именно при таком измерении и можно говорить о сокращении длины. Такой способ измерения означает задание интервала

$$s_{12}^2=-l^2.$$

Таким образом, сокращение длины определяется не только свойством пространства-времени, но и нашим способом измерения, поэтому оно, в отличие от замедления времени локализованного процесса, не имеет такого физического значения.

Величина $T_2'-T_1'$ в рассматриваемом случае будет знаконеопределенной, даже если $T_2-T_1>0$:

$$T_2'-T_1'=\begin{cases}\text{больше нуля} & \text{при } V<\dfrac{c^2}{w};\\ \text{меньше нуля} & \text{при } V>\dfrac{c^2}{w};\\ 0 & \text{при } V=\dfrac{c^2}{w}.\end{cases}$$

Таким образом, среди множества систем отсчета существует одна система $\left(V=\frac{c^2}{w}\right)$, в которой события происходят одновременно, и интервал будет иметь вид

$$s_{12}^2=-l'^2.$$

В этом случае из выражения (4.8) получаем знакомое нам уже соотношение

$$X_2'-X_1'=(X_2-X_1)\sqrt{1-V^2/c^2}.$$

б) Пусть $s_{12}^2>0$.

В этом случае точка $(X_2,\ Y_1,\ Z_1,\ T_2)$ находится внутри светового конуса и $w<c$, поэтому если $T_2-T_1>0$, то во всех штрихованных системах отсчета промежуток времени $T_2'-T_1'$ в силу второго соотношения (4.8) оказывается строго больше нуля. Величина промежутка времени $T_2'-T_1'$ в рассматриваемом случае может быть как меньше, так и больше величины промежутка в нештрихованной системе отсчета. Действительно, если справедливо неравенство

$$\frac{c^2}{V}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)<w<c,$$

то временной промежуток между событиями в штрихованной системе отсчета будет меньше, чем в нештрихованной. Для случая же, когда

$$w<\frac{c^2}{V}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right),$$

наоборот, временной промежуток в штрихованной системе отсчета будет больше, чем в нештрихованной. Например, если $w\ll c$, то

$$T_2'-T_1'=\frac{T_2-T_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Знак величины $X_2'-X_1'$ будет зависеть от знака величины $1-V/w$:

$$X_2'-X_1'=\begin{cases}\text{больше нуля,} & \text{если } V<w;\\ \text{меньше нуля,} & \text{если } V>w;\\ 0, & \text{если } V=w.\end{cases}$$

Таким образом, среди множества штрихованных систем отсчета существует система ($V=w$), в которой оба события происходят в одной и той же точке, т. е. процесс в этой системе отсчета локализован. Тогда интервал в штрихованной системе отсчета имеет вид

$$s_{12}^2=c^2(T_2'-T_1')^2$$

и промежутки времени между рассматриваемыми событиями в штрихованной и нештрихованной системах отсчета будут связаны соотношением

$$T_2'-T_1'=(T_2-T_1)\sqrt{1-V^2/c^2}.$$

Это замедление времени имеет важное значение в природе. Именно благодаря этому мы можем создать (и создаем) при высоких энергиях пучки частиц со временем жизни 10^{-8} с и транспортируем их к экспериментальным установкам на многие сотни метров, тогда как по обычным представлениям, даже если бы они двигались со скоростями близкими к скорости света, они должны были бы пролететь не более 4 м.

Таким образом, если покоящаяся частица имеет время жизни τ_0, то при движении со скоростью V она пролетит в лабораторной системе отсчета расстояние, равное

$$L=\frac{V\tau_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Часто говорят, что время в движущейся инерциальной системе идет медленнее, чем в неподвижной. Это утверждение неправильно, ибо с точки зрения принципа относительности любая инерциальная система может рассматриваться или как неподвижная, или как движущаяся. В нашем случае речь шла не о ходе времени в разных системах отсчета, а об описании в разных инерциальных системах отсчета процесса, локализованного в штрихованной системе отсчета ($X_1'=X_2'$). Именно в той системе отсчета, в которой частица покоилась, и имела место пространственная локализация. В любой другой инерциальной системе отсчета акт рождения и распад частицы происходят в разных точках пространства. Наличие же пространственной части интервала ведет (в силу его инвариантности) к увеличению времени жизни частицы в лабораторной системе отсчета.

Мы видели выше, что если в некоторой инерциальной системе отсчета произошли два события в какой-либо точке пространства, но в разное время, то в любой другой инерциальной системе отсчета эти события происходят в разных точках пространства. Аналогично, если в одной инерциальной системе отсчета два события произошли одновременно, но в разных точках пространства, то в другой инерциальной системе отсчета эти события будут уже не одновременными.

Событие, происходящее в какой-либо точке пространства, в какой-то момент времени, является абсолютным. Так, например, если две частицы столкнулись в какой-то момент времени, то это событие в любой инерциальной системе отсчета будет одновременным и одноместным.

Заметим, что в классической механике любые два события, происшедшие в двух разных точках пространства и в разные моменты времени в одной инерциальной системе отсчета, будут одноместными в другой, если последняя согласно преобразованию Галилея движется со скоростью

$$V = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}.$$

В классической механике это всегда возможно, поскольку в ней отсутствуют ограничения на величину скорости. В релятивистской теории это возможно осуществить лишь в том случае, если события связаны времениподобным интервалом

$$(X_2 - X_1)^2 < c^2 (t_2 - t_1)^2,$$

то есть когда

$$\frac{V^2}{c^2} < 1.$$

В релятивистской теории интервалы между событиями разделены на три класса: изотропные, пространственноподобные и времениподобные. В классической физике такого разделения событий нет. В ней существует только один класс событий.

До сих пор мы рассматривали диагональные, т. е. галилеевы системы, где метрика имеет вид (2.13). Теперь сделаем следующий шаг в направлении общности и рассмотрим произвольную систему координат в псевдоевклидовом пространстве-времени:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k; \quad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{4.10}$$

Здесь $x^0 = ct$, а x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты, g_{ik} — метрический тензор. Из вида (4.10) следует, что он симметричен:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Координаты x^i, входящие в выражение (4.10), здесь уже могут не иметь никакого физического смысла, а поэтому физические величины надо, вообще говоря, строить из них и метрического тензора пространства-времени.

Распишем выражение (4.10), выделив нулевые индексы:

$$ds^2 = c^2 g_{00}\, dt^2 + 2c g_{0\alpha}\, dx^\alpha\, dt + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta;$$
$$\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3.$$

Теперь сделаем то же, что мы делали раньше при преобразовании Галилея: на основании первых двух членов построим положительную величину. Для этого прибавим и вычтем квадрат величины

$$\frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Тогда получим

$$ds^2 = c^2 \left[\sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \\ - \left[-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}\right] dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{4.11}$$

Таким образом, в произвольных системах координат мы имеем аналог времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}, \tag{4.12}$$

причем это «время» будет физическим.

Второй член в (4.11) есть не что иное, как квадрат расстояния между двумя точками в обычном трехмерном пространстве

$$dl^2 = \varkappa_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{4.13}$$

где введен новый тензор

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}\, g_{0\beta}}{g_{00}}. \tag{4.14}$$

Все это мы проделали для псевдоевклидовой метрики; перехода к другой геометрии я не совершал, а просто изменил систему координат. Изменение системы координат не изменяет геометрию. Забегая вперед, скажу, что геометрия задается тензором Римана четвертого ранга, тензором кривизны. Для псевдоевклидовой геометрии тензор Римана равен нулю в любой допустимой системе координат. Следует также отметить, что в общем случае выражение (4.12) не является полным дифференциалом, так как оно содержит компоненты метрического тензора, который в общем случае является некоторой функцией координат и времени и не всегда удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{g_{00}}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{g_{0\alpha}}{c\sqrt{g_{00}}};\quad \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{g_{0\beta}}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{4.15}$$

выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы правая часть соотношения (4.12) являлась полным дифференциалом.

Поэтому, хотя интервал вида (4.10) в произвольной допустимой системе координат и может быть представлен в виде

$$ds^2=(df^0)^2-(df^1)^2-(df^2)^2-(df^3)^2,$$

величины $df^i\,(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ в общем случае не будут являться полными дифференциалами. В том случае, если величины $df^i\,(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ являются полными дифференциалами

$$df^i=\frac{\partial f^i}{\partial x^k}dx^k,$$

пространство-время имеет псевдоевклидову геометрию. Таким образом, метрические коэффициенты в этом случае имеют вид

$$g_{ik}=\frac{\partial f^0}{\partial x^i}\frac{\partial f^0}{\partial x^k}-\frac{\partial f^1}{\partial x^i}\frac{\partial f^1}{\partial x^k}-\frac{\partial f^2}{\partial x^i}\frac{\partial f^2}{\partial x^k}-\frac{\partial f^3}{\partial x^i}\frac{\partial f^3}{\partial x^k}.$$

Они выражаются через четыре произвольные функции f^0, f^1, f^2, f^3. Используя выражения для g_{ik}, получим

$$ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k=$$
$$=\left(\frac{\partial f^0}{\partial x^i}dx^i\right)^2-\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}dx^i\right)^2-\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^i}dx^i\right)^2-\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^i}dx^i\right)^2.$$

Для того чтобы найти общий вид метрических коэффициентов в инерциальной системе отсчета, выберем в трехмерном пространстве произвольные криволинейные координаты согласно преобразованию

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^1, x^2, x^3) \tag{4.16}$$

и введем новое время

$$x'^0 = f^0(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{4.17}$$

Преобразования (4.16) и (4.17) не выводят нас из заданной инерциальной системы отсчета, и мы их будем называть допустимыми преобразованиями в инерциальной системе отсчета. Тогда метрические коэффициенты в инерциальной системе отсчета примут наиболее общий вид:

$$g_{00} = \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^0}\right)^2; \quad g_{0\alpha} = \frac{\partial f^0}{\partial x^0}\frac{\partial f^0}{\partial x^{\alpha}};$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial f^0}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial f^0}{\partial x^{\beta}} - \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}}.$$

Поэтому в инерциальных системах отсчета метрический тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ будет иметь следующую структуру:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}}.$$

Отсюда непосредственно следует, что компоненты физической скорости в инерциальных системах отсчета имеют вид

$$V^{\alpha} = \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\beta}}{d\tau},$$

причем величина $d\tau$ является полным дифференциалом. В любой же неинерциальной системе отсчета величина $d\tau$ уже не будет полным дифференциалом.

Используя предыдущее выражение, получим

$$V = \frac{dl}{d\tau}; \quad dl^2 = \varkappa_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}. \tag{4.18}$$

В инерциальных системах отсчета и в отсутствие сил движение материальной точки является прямолинейным и равномерным:

$$x'^{\alpha} = x_0'^{\alpha} + V^{\alpha}(\tau - \tau_0).$$

Величины $d\tau$ и dl^2, определяемые формулами (4.12) и (4.13), мы назвали физическими, так как они не зависят от выбора системы координат в данной инерциальной системе отсчета, поскольку они инвариантны относительно преобразований (4.16) и (4.17).

§ 5. Инвариантность уравнений Максвелла—Лоренца и закон преобразования электромагнитного поля

Выше мы выяснили, что электродинамика открыла нам единство пространства и времени и установила, что геометрия пространства-времени псевдоевклидова, а ее метрический тензор в галилеевых координатах равен

$$g_{00}=1;\ g_{11}=-1;\ g_{22}=-1;\ g_{33}=-1;\ g_{ik}=0,\ \text{если}\ i\neq k. \tag{5.1}$$

Преобразования координат, которые оставляют метрические коэффициенты неизменными, называют движением метрики. Все движения этой метрики образуют группу. Преобразования координат, которые оставляют метрику форминвариантной, будут лоренцевыми преобразованиями:

$$x'^i=a^i_k x^k;\quad i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Возьмем дифференциал от левой и правой частей:

$$dx'^i=a^i_k\,dx^k. \tag{5.2}$$

Здесь и всегда по повторяющимся индексам проводится суммирование. Систему функций, преобразующихся как дифференциал, называют контравариантным четырехмерным вектором (4-вектором):

$$A'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}A^k. \tag{5.3}$$

Введем понятие ковариантного вектора. Напомню, что самым простым объектом является поле скаляра, которое в любой системе координат определяется одной функцией и преобразуется следующим образом:

$$\Psi'(x')=\Psi(x(x')).$$

Градиент скалярной функции преобразуется по закону

$$\frac{\partial \Psi'(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^k}.$$

Систему функций, преобразующихся как градиент скалярной функции, называют ковариантным вектором

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k. \tag{5.4}$$

Произведение ковариантного вектора на контравариантный является инвариантом относительно преобразований координат

$$A'_i B'^i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} A_k B^l = A_k B^k.$$

Между ковариантным и контравариантным векторами имеется следующая связь:

$$A_i = g_{ik} A^k; \quad A^i = g^{ik} A_k. \tag{5.5}$$

Отсюда следует

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_k; \quad \delta^l_k = 1 \text{ при } l = k, \quad \delta^l_k = 0 \text{ при } l \neq k. \tag{5.6}$$

Введем понятие тензора второго ранга как простое обобщение вектора. Контравариантный тензор второго ранга

$$A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} A^{lm}. \tag{5.7}$$

Ковариантный тензор второго ранга

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A_{lm}. \tag{5.8}$$

Смешанный тензор второго ранга

$$A'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A^l_m. \tag{5.9}$$

Поскольку мы рассматриваем лишь линейные преобразования, то легко показать, что

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^l}. \tag{5.10}$$

Отсюда следует, что производная от ковариантного вектора является ковариантным тензором второго ранга. Подъем и опускание индексов у тензора также осуществляется с помощью метрического тензора. Покажем теперь, что уравнения Максвелла—Лоренца имеют одинаковый вид во всех системах координат, где метрические коэффициенты

$$g_{00}=1;\quad g_{11}=-1;\quad g_{22}=-1;\quad g_{33}=-1;\quad g_{ik}=0;\quad \text{если } i\neq k, \tag{5.11}$$

остаются неизменными. Это означает, что уравнения Максвелла—Лоренца инвариантны относительно группы движения метрики.

Для того чтобы все это установить, необходимо просто записать уравнения Максвелла—Лоренца через векторы и тензоры четырехмерного пространства-времени. Но, прежде чем к этому приступить, выразим поля **E** и **H** через скалярный и векторный потенциалы Φ и **A**:

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A};\quad \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\Phi. \tag{5.12}$$

Тогда для потенциалов **A** и Φ будем иметь следующие уравнения:

$$\Box\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j};\quad \Box\Phi=-4\pi\rho;\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{5.13}$$

Из этих уравнений следует закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0. \tag{5.14}$$

Для того чтобы это уравнение было инвариантным относительно преобразований Лоренца, необходимо, чтобы плотность заряда ρ и ток $\mathbf{j}$ являлись компонентами четырехмерного контравариантного вектора S^i:

$$S^i=(c\rho,\ \mathbf{j}). \tag{5.15}$$

Тогда уравнение непрерывности запишем в виде

$$\frac{\partial S^i}{\partial x^i}=0. \tag{5.16}$$

Таким образом, плотность заряда преобразуется так же, как время, а ток $\mathbf{j}$ как вектор **R**. Учитывая выражение (5.15) для тока S^i, уравнения для векторного **A** и скалярного Φ потенциалов запишем в виде

$$\square\,\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{S},$$

$$\square\,\Phi = -\frac{4\pi}{c}S^0.$$

Для того чтобы эти уравнения не изменялись при преобразованиях Лоренца, необходимо, чтобы скалярный Φ и векторный $\mathbf{A}$ потенциалы являлись компонентами четырехмерного контравариантного вектора A^i

$$A^i = (\Phi,\ \mathbf{A}). \qquad (5.17)$$

Тогда уравнение для вектора A^i принимает вид

$$\square\,A^i = -\frac{4\pi}{c}S^i. \qquad (5.18)$$

Поскольку $A_i = g_{ik}A^k$, имеем

$$A_i = (\Phi,\ -A_x,\ -A_y,\ -A_z) = (\Phi,\ -\mathbf{A}). \qquad (5.19)$$

Введем антисимметричный тензор

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \qquad (5.20)$$

Тогда всегда

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \qquad (5.21)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} -H_x &= F_{23}; & -H_y &= F_{31}; & -H_z &= F_{12}; \\ -E_x &= F_{10}; & -E_y &= F_{20}; & -E_y &= F_{30}, \end{aligned} \qquad (5.22)$$

легко убедиться, что написанная выше система уравнений объединяет пару уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

Введем 4-вектор

$$d^i = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}, \qquad (5.23)$$

где тензор F^{ik} связан с компонентами полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} -H_x &= F^{23}; & -H_y &= F^{31}; & -H_z &= F^{12}; \\ E_x &= F^{10}; & E_y &= F^{20}; & E_z &= F^{30}. \end{aligned}$$

Чтобы эта система уравнений совпадала со второй парой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

необходимо считать, что

$$d^0 = -\frac{4\pi}{c} S^0; \quad d^\nu = -\frac{4\pi}{c} S^\nu,$$

где $\nu = 1, 2, 3$.

Таким образом, вся система уравнений Максвелла — Лоренца записывается в тензорной форме в четырехмерном пространстве-времени:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} S^i; \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0; \\ \frac{\partial S^i}{\partial x^i} = 0; \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \end{gathered} \tag{5.24}$$

Напишем теперь формулы преобразования для различных физических величин при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой в галилеевых координатах. Для простоты мы будем считать, что система K' движется относительно системы отсчета K с постоянной скоростью V вдоль оси X. Закон преобразования контравариантного вектора A^i аналогичен закону преобразования координатного вектора $x^i = (cT, X, Y, Z)$

$$\begin{gathered} A'^0 = \gamma\left(A^0 - \frac{V}{c} A^1\right); \quad A'^1 = \gamma\left(A^1 - \frac{V}{c} A^0\right); \\ A'^2 = A^2; \quad A'^3 = A^3. \end{gathered} \tag{5.25}$$

Используя эти формулы, мы найдем закон преобразования заряда и тока:

$$\begin{gathered} \rho' = \gamma\rho\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right); \quad \rho' v'_x = \gamma\rho(v_x - V); \\ \rho' v'_y = \rho v_y; \quad \rho' v'_z = \rho v_z. \end{gathered} \tag{5.26}$$

Впервые эти формулы были получены Пуанкаре. Подставляя ρ' из первой формулы в остальные, получим закон преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}; \quad v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}; \quad v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_z}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \tag{5.27}$$

Так как $A^i = (\Phi, \mathbf{A})$, то для скалярного и векторного потенциалов будут следующие формулы:

$$\Phi' = \gamma\left(\Phi - \frac{V}{c} A_x\right); \quad A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{V}{c}\Phi\right); \quad A'_y = A_y; \quad A'_z = A_z. \tag{5.28}$$

Эти формулы также были получены впервые Пуанкаре.

Закон преобразования компонент антисимметричного тензора F^{ik} совпадает с формулами преобразования тензора, построенного из векторов B^i и C^k:

$$B^iC^k - C^iB^k.$$

Поскольку формулы для преобразования векторов нам известны, легко получить формулы и для преобразования компонент антисимметричного тензора F^{ik}:

$$F'^{12} = \gamma\left(F^{12} - \frac{V}{c} F^{02}\right); \quad F'^{02} = \gamma\left(F^{02} - \frac{V}{c} F^{12}\right).$$

Аналогично

$$F'^{13} = \gamma\left(F^{13} - \frac{V}{c} F^{03}\right); \quad F'^{03} = \gamma\left(F^{03} - \frac{V}{c} F^{13}\right). \tag{5.29}$$

Две другие компоненты остаются без изменения:

$$F'^{01} = F^{01}; \quad F'^{23} = F^{23}.$$

Вспоминая связь между компонентами тензора F^{ik} и компонентами электрического и магнитного полей, из этих формул найдем закон преобразования для компонент электрического поля

$$E'_x = E_x; \quad E'_y = \gamma\left(E_y - \frac{V}{c} H_z\right); \quad E'_z = \gamma\left(E_z + \frac{V}{c} H_y\right) \tag{5.30}$$

и для компонент магнитного поля

$$H'_x = H_x; \quad H'_y = \gamma\left(H_y + \frac{V}{c} E_z\right); \quad H'_z = \gamma\left(H_z - \frac{V}{c} E_y\right). \tag{5.31}$$

Эти формулы впервые были открыты Лоренцем, однако он не установил их группового характера. Это впервые сделал Пуанкаре.

Из формул преобразования для электрического и магнитного полей следует, что если, например, в системе отсчета K' магнитное поле равно нулю, то в другой системе отсчета оно уже отлично от нуля и равно

$$H_y = -\frac{V}{c} E_z; \quad H_z = \frac{V}{c} E_y \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}]. \qquad (5.32)$$

Аналогично, если электрическое поле равно нулю в системе K', то в системе K оно отлично от нуля и равно

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]. \qquad (5.33)$$

Из компонент поля можно построить две комбинации, инвариантные относительно преобразований Лоренца

$$E^2 - H^2 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}; \quad \mathbf{EH} = \frac{1}{4} F^*_{ik} F^{ik}, \qquad (5.34)$$

где $F^{*ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} F_{lm}$; $\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon^{kilm} = \varepsilon^{klim} = -\varepsilon^{klmi}$; $\varepsilon^{0123} = 1$ (ε^{iklm} — тензор Леви-Чивита). Эти инварианты электромагнитного поля впервые открыл Пуанкаре. Отсюда, в частности, следует, что если в системе K поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны друг другу, но не равны, то всегда можно найти такую систему отсчета, в которой поле будет чисто электрическим или чисто магнитным в зависимости от знака первого инварианта. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, взаимно перпендикулярные в одной системе отсчета, остаются таковыми в любой другой системе отсчета.

Получим теперь для 4-вектора тока другое выражение. Рассмотрим инвариант

$$S_i S^i = c^2 \rho^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \qquad (5.35)$$

Обозначим через ρ_0 плотность заряда в системе отсчета, где заряд покоится, тогда

$$c^2 \rho^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = c^2 \rho_0^2.$$

Отсюда имеем

$$\rho = \gamma \rho_0. \qquad (5.36)$$

Введем вектор скорости

$$U^i = (c\gamma, \ \gamma \mathbf{v}); \quad U_i U^i = c^2, \qquad (5.37)$$

компоненты которого преобразуются так же, как время и координаты. Такую величину впервые ввел Пуанкаре. Уравнение сохранения заряда можно теперь записать в виде

$$\frac{\partial(\rho_0 U^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{5.38}$$

Теперь найдем закон преобразования силы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Выражение для силы Лоренца, отнесенной к единице объема, в системе отсчета K имеет вид

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} + \rho\frac{1}{c}[\mathbf{u}, \mathbf{H}]. \tag{5.39}$$

Тогда в системе отсчета K' мы должны иметь аналогичное выражение

$$\mathbf{F}' = \rho'\mathbf{E}' + \rho'\frac{1}{c}[\mathbf{u}', \mathbf{H}']. \tag{5.40}$$

Выражая штрихованные переменные через нештрихованные, получим закон преобразования для силы

$$\begin{aligned} &F'_x = \gamma\left(F_x - \frac{V}{c}F\right);\\ &F'_y = F_y; \quad F'_z = F_z;\\ &F' = \gamma\left(F - \frac{V}{c}F_x\right). \end{aligned} \tag{5.41}$$

Здесь мы обозначили через F выражение

$$F = \frac{1}{c}(\mathbf{uF}). \tag{5.42}$$

Эти формулы были впервые найдены Пуанкаре. Мы видим из них, что трехмерный скаляр F и вектор $\mathbf{F}$ преобразуются так же, как компоненты $(X^0, \mathbf{X})$. Установим теперь закон преобразования силы, отнесенной к единице заряда

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uH}]; \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\rho}. \tag{5.43}$$

Используя формулы (5.41) и (5.42), найдем

$$\begin{aligned} &f'_x = \gamma\frac{\rho}{\rho'}\left(f_x - \frac{V}{c}f\right); \quad f' = \gamma\frac{\rho}{\rho'}\left(f - \frac{V}{c}f_x\right);\\ &f'_y = \frac{\rho}{\rho'}f_y; \quad f'_z = \frac{\rho}{\rho'}f_z, \end{aligned} \tag{5.44}$$

где $f=\frac{1}{c}(\mathbf{uf})$. Из ранее приведенной формулы (5.26) для преобразования плотности имеем

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{u_xV}{c^2}}. \qquad (5.45)$$

Для дальнейшего нам необходимо ввести относительную скорость и воспользоваться формулой (3.15). Однако эту формулу легко получить, если воспользоваться понятием 4-вектора скорости. Возьмем два тела, и пусть вектор скорости каждого из них в некоторой инерциальной системе отсчета K имеет компоненты

$$U_1=(c\gamma_1,\ \mathbf{V}_1\gamma_1);\quad U_2=(c\gamma_2,\ \mathbf{V}_2\gamma_2).$$

Тогда в системе K', в которой первое тело покоится, имеем

$$U_1=(c,\ 0);\quad U_2=(c\gamma,\ \mathbf{V}\gamma).$$

Поскольку величина

$$U_{1i}U_2^i$$

является инвариантом, то, вычисляя ее в системах K и K', имеем

$$1-\frac{V^2}{c^2}=\frac{(1-V_1^2/c^2)\,(1-V_2^2/c^2)}{\left(1-\frac{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2}{c^2}\right)^2},$$

откуда

$$V^2=\frac{(\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2)^2-[\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2]^2/c^2}{\left(1-\frac{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2}{c^2}\right)^2}.$$

Применяя предыдущую форму для нашего случая, имеем для скорости u'^2 в системе отсчета K' следующее выражение:

$$\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}\,\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\frac{u_xV}{c^2}}. \qquad (5.46)$$

Используя его, получим

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\sqrt{1-u'^2/c^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (5.47)$$

Подставляя это выражение в формулы преобразования (5.44) и вводя обозначения

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}} = \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \mathfrak{R} = \frac{f}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{5.48}$$

найдем

$$\begin{gathered} \mathfrak{R}'_x = \gamma\left(\mathfrak{R}_x - \frac{V}{c}\mathfrak{R}\right); \quad \mathfrak{R}' = \gamma\left(\mathfrak{R} - \frac{V}{c}\mathfrak{R}_x\right); \\ \mathfrak{R}'_y = \mathfrak{R}_y; \quad \mathfrak{R}'_z = \mathfrak{R}_z. \end{gathered} \tag{5.49}$$

Мы видим, что геометрический объект $\{\mathfrak{R}, \boldsymbol{\mathfrak{R}}\}$ преобразуется так же, как $\{x^0, \mathbf{x}\}$. Такую величину впервые ввел Пуанкаре. Ее обычно называют 4-вектором силы

$$\mathfrak{R}^i = (\mathfrak{R}, \boldsymbol{\mathfrak{R}}). \tag{5.50}$$

Запишем теперь силу Лоренца в четырехмерном виде. Легко убедиться, что

$$F^i = \frac{1}{c} F^{ik} S_k. \tag{5.51}$$

Отсюда непосредственно следует, если учесть формулы (5.15) и (5.23), что

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}[\mathbf{uH}]; \quad F^0 = \frac{1}{c}(\mathbf{uF}).$$

Аналогично для 4-вектора силы имеем

$$\mathfrak{R}^i = \frac{1}{c} F^{ik} U_k. \tag{5.52}$$

Таким образом, вся система уравнений электродинамики, включая и силу Лоренца, записывается через векторы и тензоры четырехмерного пространства-времени. Представления о пространстве-времени, которые открыты на основе изучения электромагнитных явлений, можно теперь как гипотезу распространить на все физические явления и, в первую очередь, на механические. Это находится в полном соответствии с принципом относительности — в природе невозможно абсолютное движение. Отсюда следует, что уравнения механики Ньютона должны быть изменены так, чтобы новые уравнения механики были инвариантны относительно преобразований Лоренца. Это проще всего сделать, если записать их в четырехмерном виде. Хотя мы выше и имели дело только с электродинамикой, тем не менее ряд формул, полученных нами, имеет общий характер. Это относится, в первую очередь, к понятиям

4-вектора скорости (5.37) и 4-вектора силы (5.48) и (5.49).

Перейдем к построению релятивистских уравнений механики.

§ 6. Релятивистская механика Пуанкаре

Воспользуемся 4-вектором скорости (5.37) и введем 4-вектор импульса частицы

$$p^i = mU^i, \quad p_i p^i = m^2 c^2. \tag{6.1}$$

Поскольку скорость частицы всегда меньше c, определим инвариантное время $d\tau$:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) dt^2. \tag{6.2}$$

Производная от 4-вектора скорости по инвариантному времени τ также будет 4-вектором. Его обычно называют 4-вектором ускорения.

Принимая во внимание определение 4-вектора силы (5.48), релятивистские уравнения механики будут

$$m \frac{dU^i}{d\tau} = \mathfrak{R}^i, \tag{6.3}$$

или, в трехмерном виде,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = \mathbf{f}; \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right) = (\mathbf{V}\mathbf{f}). \tag{6.5}$$

Эти уравнения впервые открыл Пуанкаре, он и является создателем релятивистской механики.

Второе из них можно получить из первого, умножая обе части уравнения на вектор $\mathbf{V}$. Из (6.4) и (6.5) легко определить импульс $\mathbf{p}$ и энергию E частицы

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6.6}$$

Тогда

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right). \tag{6.7}$$

Легко убедиться в том, что

$$\Re^i p_i = 0. \tag{6.8}$$

Выражения (6.6) для импульса и энергии можно получить и с помощью функции Лагранжа, если определить ее следующим образом:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{6.9}$$

Тогда импульс $\mathbf{p}$ равен

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{6.10}$$

а поскольку гамильтониан H равен

$$H = \mathbf{V}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} - L, \tag{6.11}$$

имеем

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{или} \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{6.12}$$

Функция действия для частицы имеет вид

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{6.13}$$

или, если учесть, что в галилеевых координатах

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - V^2/c^2},$$

имеем

$$S = -mc\int\limits_a^b ds. \tag{6.14}$$

Функцию Лагранжа (6.9) впервые построил Пуанкаре. Здесь интеграл берется между двумя фиксированными точками вдоль мировой линии. В произвольной допустимой системе координат интервал имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{6.15}$$

а, следовательно, функция Лагранжа для частицы будет

$$L = -mc^2\sqrt{g_{00} + \frac{1}{c}2g_{0\alpha}\dot{x}^\alpha + \frac{1}{c^2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}. \tag{6.16}$$

Отсюда, обобщенные импульсы будут равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = (mc^2)^2 \frac{\frac{1}{c} g_{0\alpha} + \frac{1}{c^2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta}{L}. \tag{6.17}$$

Функция Гамильтона вычисляется обычным образом:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\alpha - L. \tag{6.18}$$

Принимая во внимание, что

$$\dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = L - (mc^2)^2 \frac{g_{00} + \frac{1}{c} g_{0\beta} \dot{x}^\beta}{L},$$

найдем

$$H = -(mc^2)^2 \frac{g_{00} + \frac{1}{c} g_{0\beta} \dot{x}^\beta}{L}. \tag{6.19}$$

Введем теперь 4-вектор импульса

$$p_i = mcg_{ik} \frac{dx^k}{ds}.$$

Здесь

$$p_0 = \frac{H}{c} \tag{6.20}$$

или

$$p^i = mc \frac{dx^i}{ds}. \tag{6.21}$$

Поскольку

$$g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 1, \tag{6.22}$$

имеем

$$g_{ik} p^i p^k = m^2 c^2. \tag{6.23}$$

Аналогично

$$g^{ik} p_i p_k = m^2 c^2. \tag{6.24}$$

Выразим теперь импульсы через частные производные от функции действия S по координатам и времени:

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}. \tag{6.25}$$

Подставляя эти выражения в (6.24), получим уравнение для геодезической линии в форме Гамильтона—Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=m^2c^2. \tag{6.26}$$

Мы видим, что релятивистские уравнения для движения частицы, так же как и уравнения для фронта электромагнитной волны, содержат представления о структуре пространства-времени. В галилеевых координатах, где метрический тензор равен

$$g_{00}=1;\ g_{11}=-1;\ g_{22}=-1;\ g_{33}=-1;\ g_{ik}=0,\ \text{если}\ i\neq k,$$

уравнение для геодезической линии будет иметь вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=m^2c^2. \tag{6.27}$$

Если вместо S ввести действие следующим образом:

$$S\to S-mc^2t,$$

то после замены, в пределе при $c\to\infty$, мы получим уравнение Гамильтона—Якоби в классической механике (1.14).

§ 7. Принцип стационарного действия в электродинамике

Многие уравнения теоретической физики получают из условия экстремума функционала, который называют действием. Нам необходимо и для электродинамики составить действие таким образом, чтобы его вариации по полям приводили к уравнениям Максвелла—Лоренца. Действие строится с помощью скалярных функций поля и тока.

Составим действие, которое содержит электромагнитное поле, а также взаимодействие его с зарядами и токами. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{7.1}$$

который в силу построения удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0. \tag{7.2}$$

Потенциалы A_i мы и будем далее варьировать при получении других уравнений поля. Для дальнейшего нам понадобятся лишь два инварианта

$$A_i S^i; \quad F_{ik} F^{ik}. \tag{7.3}$$

Здесь S^i — четырехмерный вектор тока.

Как мы увидим далее, этих скалярных функций вполне достаточно, чтобы построить действие, вариация которого приводит ко второй паре уравнений Максвелла. Искомое действие будет иметь вид

$$S = \frac{1}{c} \int \mathfrak{L}\, d\Omega,$$

где $\mathfrak{L}$ — плотность функции Лагранжа, равная

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{c} A_i S^i - \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}, \text{ а } d\Omega = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{7.4}$$

При нахождении уравнений поля в функции действия мы будем варьировать лишь потенциалы поля, считая источники поля S^i заданными. Тогда

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^i\, \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik}\, \delta F_{ik} \right] d\Omega.$$

Выражая F_{ik} через потенциалы A_i, получим

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^i\, \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right] d\Omega = 0.$$

Интегрируя во втором члене по частям и учитывая, что вариации потенциалов в начальный и конечный моменты времени равны нулю, а поле на бесконечности исчезает, найдем

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right] \delta A_i\, d\Omega = 0.$$

Поскольку вариации δA_i произвольны, имеем

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^{ik}} = -\frac{4\pi}{c} S^i. \tag{7.5}$$

Итак, наш выбор действия оправдан, поскольку мы точно получили вторую пару уравнений Максвелла. Однако необходимо иметь в виду, что выбор плотности функции Лагранжа в функции действия не является однозначным, поскольку легко убедиться, что добавление к плотности функции Лагранжа дополнительного члена типа четырехмерной дивергенции вектора не отражается на виде уравнений поля. В частности, заметим, что уравнения Максвелла (5.24) инвариантны при калибровочных преобразованиях потенциалов

$$A'_i = A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{7.6}$$

где f — произвольная функция.

Построенная нами плотность Лагранжа $\mathfrak{L}$ не инвариантна, она изменяется при этих преобразованиях на четырехмерную дивергенцию вектора. Найдем теперь уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Для их получения необходимо составить действие, которое содержит часть, относящуюся к частицам, а также известную уже часть, содержащую взаимодействие поля с частицами.

Так как для частиц

$$\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{7.7}$$

имеем

$$-\frac{1}{c^2}\int S^i A_i \, d\Omega = -\frac{e}{c}\int A_i dx^i, \tag{7.8}$$

действие для частиц в электромагнитном поле будет равно

$$S = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_i dx^i. \tag{7.9}$$

Варьируя по координатам частицы, имеем

$$\delta S = -\int\left(mc\frac{dx_i}{ds}\, d\delta x^i + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_k dx^k\right) = 0.$$

Интегрируя в первых двух членах по частям и полагая вариации координат на концах равными нулю, получим

$$\delta S = \int\left(m du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i\, \delta x^i - \frac{e}{c}\delta A_k dx^k\right) = 0.$$

Подставляя в это выражение очевидные соотношения

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k; \qquad \delta A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\delta x^i,$$

найдем

$$\int\left[m\frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c^2}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k - \frac{e}{c^2}\frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^k\right]\delta x^i\, ds = 0,$$

откуда в силу произвольности вариаций δx^i имеем уравнение движения заряда в виде

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u^k \tag{7.10}$$

или

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{7.11}$$

§ 8. Электродинамика в произвольных координатах

Прежде чем записать уравнения Максвелла в произвольных координатах, заметим, что обычная производная от вектора в этих переменных уже не является тензором второго ранга, как ранее было, когда мы имели дело лишь с координатами, для которых все метрические коэффициенты g_{ik} псевдоевклидова пространства-времени постоянны. Для дальнейшего необходимо ввести ковариантное дифференцирование. Определим ковариантное дифференцирование вектора таким образом, чтобы после дифференцирования мы получили тензор второго ранга.

Тогда ковариантная производная от ковариантного вектора равна

$$\nabla_i A_k=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ki}A_s, \tag{8.1}$$

а от контравариантного вектора

$$\nabla_i A^k=\frac{\partial A^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{is}A^s, \tag{8.2}$$

где Γ^s_{kl}—символы Кристоффеля, определяемые выражением (8.5).

Ковариантную производную от тензора второго ранга мы определим следующим образом:

$$\nabla_i T_{kl}=\frac{\partial T_{kl}}{\partial x^i}-\Gamma^s_{ki}T_{sl}-\Gamma^s_{li}T_{ks} \tag{8.3}$$

для ковариантного тензора и

$$\nabla_i T^{kl}=\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^i}+\Gamma^k_{si}T^{sl}+\Gamma^l_{si}T^{ks} \tag{8.4}$$

для контравариантного тензора.

Эти формулы для производных легко обобщаются на случай тензора произвольного ранга.

Символы Кристоффеля выражаются через метрические коэффициенты следующим образом:

$$\Gamma^k_{lm} = g^{kn}\Gamma_{n;\, lm}; \quad \Gamma_{n;\, lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\right). \quad (8.5)$$

Контравариантным дифференцированием будем называть операцию

$$\nabla^i = g^{ik}\nabla_k. \quad (8.6)$$

Вычислим теперь ковариантную дивергенцию от вектора

$$\nabla_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{ki}A^i. \quad (8.7)$$

Здесь

$$\Gamma^k_{ki} = g^{ml}\Gamma_{m;\, li} = \frac{1}{2}\, g^{ml}\, \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}.$$

Учитывая, что

$$g^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x^i}, \quad (8.8)$$

где g — детерминант, составленный из g_{ik}, получим

$$\Gamma^k_{ki} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}. \quad (8.9)$$

Используя это выражение, имеем

$$\nabla_k A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^k)}{\partial x^k}. \quad (8.10)$$

Перейдем теперь к записи уравнений Максвелла в криволинейных координатах пространства-времени. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \nabla_k A_i - \nabla_i A_k = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (8.11)$$

Мы видим, что члены с символами Кристоффеля взаимно сократились и не входят в выражение F_{ik} через потенциалы. Отсюда первая пара уравнений Максвелла может быть записана в обычной форме:

$$\nabla_i F_{kl} + \nabla_k F_{li} + \nabla_l F_{ik} = \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0. \quad (8.12)$$

Другая пара уравнений Максвелла имеет вид

$$\nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c}\rho_0 u^i. \tag{8.13}$$

Уравнения движения заряженных частиц могут быть получены обобщением уравнения (7.10):

$$\mu_0 u^k \nabla_k u_i = \frac{\rho_0}{c} F_{il} u^l, \tag{8.14}$$

здесь μ_0 — плотность массы покоя.

Из уравнения (8.13) в силу антисимметрии тензора F^{ik} следует, что вектор $\rho_0 u^i$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_k (\rho_0 u^k) = 0. \tag{8.15}$$

Аналогично уравнению сохранения удовлетворяет и вектор $\mu_0 u^k$:

$$\nabla_k (\mu_0 u^k) = 0. \tag{8.16}$$

Плотность массы $\mu = \sqrt{-g}\,\mu_0 u^0$ называется сохраняющейся, поскольку интеграл от μ по объему не зависит от времени в силу (8.16).

Покажем теперь, что ковариантные уравнения Максвелла можно получить из вариации действия по переменным поля и частиц, если действие записать для произвольных координат. Переход в действии от галилеевых координат, в которых метрический тензор диагонален (1, —1, —1, —1), к криволинейным координатам, в которых метрические коэффициенты являются функциями координат, легко осуществляется с помощью простой замены переменных под интегралом и применением элементов тензорного анализа. Осуществляя эту процедуру, получим функцию действия в произвольных координатах

$$S = -\frac{1}{2}\int \sqrt{-g}\, d\Omega \left[\mu_0 c^2 + \frac{1}{c}\rho_0 u^i A_i + \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik}\right]. \tag{8.17}$$

Заметим, что при любых преобразованиях координат величина

$$\sqrt{-g}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{8.18}$$

является инвариантом.

Приступим теперь, следуя Фоку, к получению ковариантных уравнений Максвелла и уравнений движения вещества, исходя из принципа стационарного действия. Для этой цели нам необходимо вычислить вариации величин u^{α}, ρ_0 и μ_0 при произвольных вариациях траектории частицы вещества. Обозначим через a_1, a_2, a_3 начальные координаты частицы вещества, а через p — параметр, характеризующий время. Выразим координаты частицы через новые переменные:

$$x^k = f^k(p, a_1, a_2, a_3); \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{8.19}$$

Эти функции дают при постоянных a_1, a_2, a_3 и переменном p движение данной частицы вещества. В дальнейшем при получении уравнений движения вещества мы будем варьировать по этим функциям:

$$\delta x^i = \delta f^i(p, a_1, a_2, a_3). \tag{8.20}$$

Компоненты четырехмерной скорости в новых переменных имеют вид

$$u^l = c \frac{\dfrac{\partial f^l}{\partial p}}{\sqrt{g_{ik} \dfrac{\partial f^i}{\partial p} \dfrac{\partial f^k}{\partial p}}}. \tag{8.21}$$

Легко убедиться, что

$$u_k u^k = g_{kl} u^k u^l = c^2. \tag{8.22}$$

Введем определение вариаций. Обозначим через $\delta_c u^i$ вариацию

$$\delta_c u^i = u'^i(x + \delta x) - u^i(x). \tag{8.23}$$

Вариация $\delta_c u^i$ не является вектором. Введем вариацию $\delta u^i(x)$, которая равна

$$\delta u^i(x) = u'^i(x) - u^i(x). \tag{8.24}$$

Легко убедиться, что

$$\delta u^i(x) = \delta_c u^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \delta x^k. \tag{8.25}$$

Вычислим теперь вариацию δ_c от функции

$$\Phi = \sqrt{g_{ik} \frac{\partial f^i}{\partial p} \frac{\partial f^k}{\partial p}}. \tag{8.26}$$

Найдем

$$\delta_c\Phi = \frac{1}{c^2}\Phi u^i u^k\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + g_{li}\frac{\partial \delta x^l}{\partial x^k}\right). \tag{8.27}$$

Применяя формулу для ковариантной производной

$$\nabla_i \delta x^k = \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il}\,\delta x^l, \tag{8.28}$$

получим

$$\delta_c\left(\sqrt{g_{ik}\frac{\partial f^i}{\partial p}\frac{\partial f^k}{\partial p}}\right) = \frac{1}{c^2}\sqrt{g_{ik}\frac{\partial f^i}{\partial p}\frac{\partial f^k}{\partial p}}\; u_l u^m \nabla_m \delta x^l. \tag{8.29}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \delta x^i}{\partial p} = \frac{\partial f^k}{\partial p}\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^k}, \tag{8.30}$$

а также выражение (8.29), имеем

$$\delta_c u^i = u^k\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}u^i u_n u^k\,\nabla_k \delta x^n. \tag{8.31}$$

На основании (8.25) получим

$$\delta u^i(x) = u^k\frac{\partial \delta x^i}{\partial x^k} - \delta x^k\frac{\partial u^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}u^i u_n u^k\,\nabla_k \delta x^n, \tag{8.32}$$

или, в ковариантной форме,

$$\delta u^i(x) = u^n\,\nabla_n \delta x^i - \delta x^n\,\nabla_n u^i - \frac{1}{c^2}u^i u_k u^n \nabla_n \delta x^k. \tag{8.33}$$

Мы видим, что вариация δu^i является вектором. Используя уравнения непрерывности

$$\nabla_i(\rho_0 u^i) = 0;\quad \nabla_i(\mu_0 u^i) = 0, \tag{8.34}$$

найдем вариации $\delta\rho_0$ и $\delta\mu_0$. В силу определения вариации δ имеем

$$\nabla_i \delta(\rho_0 u^i) = 0. \tag{8.35}$$

Учитывая выражение (8.33), найдем

$$\delta(\rho_0 u^i) = u^i\left[\delta\rho_0 + \nabla_n(\rho_0\delta x^n) - \frac{\rho_0}{c^2}u_k u^n\,\nabla_n \delta x^k\right] + \\ + \nabla_n(\rho_0 u^n\,\delta x^i - \rho_0 u^i\,\delta x^n). \tag{8.36}$$

Подставляя это выражение в (8.35), получим

$$\nabla_i u^i\left[\delta\rho_0 + \nabla_n(\rho_0\,\delta x^n) - \frac{1}{c^2}\rho_0 u_k u^n \nabla_n \delta x^k\right] = 0, \tag{8.37}$$

откуда имеем

$$\delta\rho_0 = -\nabla_n(\rho_0\,\delta x^n) + \frac{1}{c^2}\rho_0 u_k u^n \nabla_n \delta x^k. \tag{8.38}$$

Аналогично

$$\delta\mu_0 = -\nabla_n(\mu_0\,\delta x^n) + \frac{1}{c^2}\mu_0 u_k u^n \nabla_n \delta x^k. \tag{8.39}$$

В силу (8.38) вариация тока равна

$$\delta(\rho_0 u^i) = \nabla_k(\rho_0 u^k\,\delta x^i - \rho_0 u^i\,\delta x^k). \tag{8.40}$$

С помощью соотношения (8.10) ее можно записать в виде

$$\delta(\rho_0 u^i) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-g}\,(\rho_0 u^k\,\delta x^i - \rho_0 u^i\,\delta x^k)\right]. \tag{8.41}$$

На основании полученных вариаций для $\delta\rho_0$, $\delta\mu_0$, $\delta(\rho_0 u^i)$ легко получить общековариантные уравнения поля (8.13) и уравнения движения вещества (8.14). Для этой цели найдем вариацию от действия

$$S = -\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,d\Omega\left[\mu_0 c^2 + \frac{1}{c}\rho_0 u^i A_i + \frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik}\right], \tag{8.42}$$

причем вариации δx^j, δA_k на границе будем принимать равными нулю. Перейдем теперь к вычислению вариации

$$\delta S = -\delta\int\sqrt{-g}\,d\Omega\left[\mu_0 c + \frac{1}{c^2}\rho_0 u^i A_i + \frac{1}{16\pi c}F_{jk}F^{jk}\right] = 0. \tag{8.43}$$

Используя (8.39), найдем вариации от первого члена (8.43)

$$-\delta\int\sqrt{-g}\,d\Omega\,\mu_0 c = \frac{1}{c}\int\mu_0\delta x^j(u^k\nabla_k u_j)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.44}$$

На основании (8.41) вариация от второго члена (8.43) будет равна

$$-\frac{1}{c^2}\delta\int\rho_0 u^i A_i\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{1}{c^2}\int\rho_0 u^i(\delta A_i + F_{ki}\delta x^k)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.45}$$

Найдем теперь вариацию от третьего члена (8.43)

$$-\frac{1}{16\pi c}\delta\int F_{ik}F^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega =$$

$$= -\frac{1}{8\pi c}\int F^{ik}\left(\frac{\partial\delta A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta A_i}{\partial x^k}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.46}$$

Интегрируя в (8.46) по частям и учитывая антисимметрию тензора F^{ik}, получим

$$-\frac{1}{16\pi c}\delta\int F_{ik}F^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=-\frac{1}{4\pi c}\int\nabla_j F^{ij}\delta A_i\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{8.47}$$

Суммируя выражения (8.44), (8.45) и (8.47), найдем

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,d\Omega\left[\delta x^k\left(\mu_0 u^i\nabla_i u_k-\frac{1}{c}\rho_0 F_{ki}u^i\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{4\pi}\nabla_i F^{ki}+\frac{1}{c}\rho_0 u^k\right)\delta A_k\right]=0. \tag{8.48}$$

Откуда в силу произвольности вариаций δx^i и δA_k имеем

$$\mu_0 u^i\nabla_i u^k=\frac{1}{c}\rho_0 F^{kj}u_j,$$

$$\nabla_i F^{ki}=-\frac{4\pi}{c}\rho_0 u^k.$$

Итак, из интеграла действия, записанного в произвольных координатах псевдоевклидова пространства-времени мы автоматически получили общековариантные уравнения поля и уравнения движения вещества. При этом, поскольку в галилеевых координатах мы исходили из диагонального метрического тензора (1, —1, —1, —1), наш вывод имеет чисто математический характер. Хотя запись уравнений в общековариантной форме есть математическая процедура, однако она существенно расширяет наши возможности описания физических явлений.

Если ранее уравнения позволяли описывать электромагнитные явления лишь в инерциальных системах отсчета (галилеевы координаты), то общековариантная запись уравнений позволяет описывать электромагнитные явления и в неинерциальных (ускоренных) системах отсчета. Таким образом, специальная теория относительности описывает явления как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета. Конечно, эти явления протекают существенно по-разному в неинерциальных системах отсчета, однако и в этом случае можно всегда указать бесконечную совокупность других неинерциальных систем отсчета, в которых явления протекают так же, как в исходной неинерциальной системе отсчета. Глубоко укоренившееся представление о том, что специальная теория относительности неприменима к ускоренным системам отсчета [8, 9, 11, 19, 64], является неправильным. На анализе этой проблемы мы в дальнейшем специально остановимся.

§ 9. Уравнения движения и законы сохранения в классической теории поля

Ранее мы видели, что с помощью лагранжева подхода можно построить все уравнения Максвелла. Этот подход имеет явный общековариантный характер. Он позволяет получить в общем виде уравнения движения поля и законы сохранения без явной конкретизации плотности функции Лагранжа. В этом подходе каждое физическое поле описывается одно- или многокомпонентной функцией координат и времени, называемой функцией поля (или полевой переменной). В качестве полевых переменных берутся величины, преобразующиеся по одному из представлений группы Лоренца, например скалярное, спинорное, векторное и даже тензорное. Наряду с полевыми переменными важную роль играет и метрический тензор пространства-времени, который определяет естественную геометрию для физического поля, а также выбор той или иной системы координат, в которой производится описание физических процессов. Выбор системы координат является в то же время и выбором системы отсчета. Конечно, не всякий выбор системы координат изменяет систему отсчета. Любые преобразования в данной системе отсчета вида

$$\begin{aligned} x'^0 &= f^0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3); \\ x'^\alpha &= f^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3); \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned} \tag{9.1}$$

всегда оставляют нас в этой системе отсчета. Всякий другой выбор системы координат обязательно приводит к изменению системы отсчета. Выбор систем координат производится из класса допустимых координат, в котором

$$g_{00} > 0, \quad g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta < 0. \tag{9.2}$$

Исходным пунктом лагранжева формализма является построение функции действия. Обычно выражение, определяющее функцию действия, записывают в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\mathfrak{L}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3, \tag{9.3}$$

где интегрирование производится по некоторой произвольной четырехмерной области пространства-времени. Поскольку действие должно быть общековариантным, плотность функции Лагранжа является плотностью скаляра веса $+1$. Плотность скаляра веса $+1$ есть произведение скалярной функции на величину $\sqrt{-g}$. Выбор плотности лагранжиана осуществляется из ряда требований. К их числу относятся требования вещественности и ковариантности.

Вещественность плотности лагранжиана гарантирует вещественность динамических характеристик физического поля, таких, например, как энергия и импульс поля. Ковариантность плотности лагранжиана обеспечивает ковариантность уравнений поля. Таким образом, плотность лагранжиана теории является скалярной плотностью, построенной из изучаемых полей φ_A, метрического тензора и частных производных по координатам

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\varphi_A,\ \partial_n\varphi_A,\ \ldots,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik}\ldots). \tag{9.4}$$

Для простоты предположим, что рассматриваемая нами система состоит из вещественных скалярного и векторного полей. Будем считать, что лагранжиан системы полей не содержит производных выше первого порядка. Это ограничение приводит к тому, что все наши уравнения поля будут уравнениями второго порядка:

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_n\varphi,\ A_i,\ \partial_n A_i,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik},\ g^{ik},\ \partial_n g^{ik}). \tag{9.5}$$

Уравнения поля найдем из условия равенства нулю функциональной вариации от действия

$$\delta S = \\ =\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d\Omega\,\delta\mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_n\varphi,\ A_i,\ \partial_n A_i,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik},\ g^{ik},\ \partial_n g^{ik})=0. \tag{9.6}$$

Вариация $\delta\mathfrak{L}$ равна

$$\delta\mathfrak{L}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\delta\partial_n\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_i}\delta A_i+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta\partial_n A_i \qquad (9.7)$$

или

$$\delta\mathfrak{L}=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\delta A_i+\partial_n\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\delta\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta A_i\right]=0. \qquad (9.8)$$

Здесь мы обозначили вариационную производную Эйлера через

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi}-\partial_n\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\right). \qquad (9.9)$$

При получении выражения (9.8) мы учли, что

$$\delta\partial_n A_i=\partial_n\delta A_i. \qquad (9.10)$$

Подставляя (9.8) в (9.6) и применяя теорему Гаусса, получим

$$\delta S=\frac{1}{c}\int_\Omega d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\delta A_i\right)+$$
$$+\frac{1}{c}\int ds_n\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\delta\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta A\right]=0.$$

Поскольку вариация полей на границе равняется нулю, имеем

$$\delta S=\frac{1}{c}\int_\Omega d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\delta A_i\right)=0. \qquad (9.11)$$

В силу независимости и произвольности вариаций $\delta\varphi$ и δA_i, с помощью основной леммы вариационного исчисления получим уравнения для полей

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}=0;\quad \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}=0. \qquad (9.12)$$

Кроме уравнений поля метод Лагранжа дает возможность получить и дифференциальные законы сохранения. Принято различать два типа дифференциальных законов сохранения: сильные и слабые.

Сильным законом сохранения называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Слабые законы сохранения получаются из сильных, если учесть в них уравнения поля (9.12).

Следует особо подчеркнуть, что дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают сохранение чего-либо ни локально, ни глобально. Для нашего случая действие имеет вид

$$S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\, \mathfrak{L}(\varphi,\ \partial_n\varphi,\ A_i,\ \partial_n A_i,\ g_{ik},\ \partial_n g_{ik},\ g^{ik},\ \partial_n g^{ik}). \qquad (9.13)$$

Совершим бесконечно малое преобразование системы координат

$$x'^i = x^i + \delta x^i, \qquad (9.14)$$

где δx^i — бесконечно малый 4-вектор.

Так как действие является скаляром, то при этом преобразовании оно останется неизменным, а следовательно,

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega'} d^4x'\ \mathfrak{L}'(x') - \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\ \mathfrak{L}(x) = 0, \qquad (9.15)$$

где

$$\mathfrak{L}'(x') = \mathfrak{L}'(\varphi'(x'),\quad \partial'_n\varphi'(x'),\quad A'_i(x'),\quad \partial'_n A'_i(x),$$
$$g'_{ik}(x'),\quad \partial'_n g'_{ik}(x'),\quad g'^{ik}(x'),\quad \partial'_n g'^{ik}(x')).$$

Первый член в (9.15) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} d^4x'\,\mathfrak{L}'(x') = \int\limits_{\Omega} J\, d^4x\,\mathfrak{L}'(x'), \qquad (9.16)$$

где якобиан J равен

$$J = \frac{\partial(x'^0,\ x'^1,\ x'^2,\ x'^3)}{\partial(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)} = \det\left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right\|. \qquad (9.17)$$

При преобразовании (9.14) якобиан имеет вид

$$J = 1 + \partial_i \delta x^i. \qquad (9.18)$$

Разлагая $\mathfrak{L}'(x')$ в ряд Тейлора, имеем

$$\mathfrak{L}'(x') = \mathfrak{L}'(x) + \delta x^i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} + \ldots \qquad (9.19)$$

Учитывая (9.16), (9.18) и (9.19), перепишем вариацию (9.15) в виде

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x \left[\delta_L \mathfrak{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\delta x^i\,\mathfrak{L}(x)) \right]. \qquad (9.20)$$

Здесь мы обозначили

$$\delta_L \mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}'(x) - \mathfrak{L}(x). \tag{9.21}$$

Эта вариация обычно называется вариацией Ли. Она перестановочна с частным дифференцированием

$$\delta_L \partial_l = \partial_l \delta_L. \tag{9.22}$$

Вариация Ли от плотности функции Лагранжа равна

$$\begin{aligned}\delta_L \mathfrak{L} = {} & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi}\delta_L \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n \varphi)}\delta_L \partial_n \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_i}\delta_L A_i + \\ & + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta_L \partial_n A_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}\delta_L g_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g_{ik})}\delta_L \partial_n g_{ik} + \\ & + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{lm}}\delta_L g^{lm} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g^{lm})}\delta_L \partial_n g^{lm}.\end{aligned} \tag{9.23}$$

Вариация Ли от контравариантных компонент g^{lm} является зависимой от вариации ковариантных компонент g_{lm}. Поскольку

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l,$$

то легко получить

$$\delta_L g^{ml} = -g^{il} g^{km} \delta_L g_{ik}. \tag{9.24}$$

Совершая элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned}\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x \Bigg[& \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi}\delta_L \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i}\delta_L A_i + \\ & + \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{il} g^{km}\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{lm}}\right)\delta_L g_{ik} + D_n J^n \Bigg] \doteq 0,\end{aligned} \tag{9.25}$$

где

$$\begin{aligned}J^n = \mathfrak{L}\,\delta x^n + & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n \varphi)}\delta_L \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\delta_L A_i + \\ & + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g_{ik})}\delta_L g_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g^{lm})}\delta_L g^{lm}.\end{aligned} \tag{9.26}$$

Так как J^n является 4-вектором веса $+1$, то

$$\partial_n J^n = D_n J^n, \tag{9.27}$$

где D_n — ковариантная производная в псевдоевклидовом пространстве-времени.

Следует отметить, что вариации Ли $\delta_L \varphi$ и $\delta_L A_i$, входящие в выражение (9.25), в отличие от функциональных вариаций, не являются независимыми друг от друга, поскольку они порождены преобразованием координат (9.14). Все они могут быть выражены через четыре компоненты вектора δx^m. Вариация метрического тензора $\delta_L g_{ik}$ также порождена преобразованием координат и также может быть выражена через 4-вектор δx^m. Поскольку преобразование координат никогда не может изменить характера геометрии, то все наше рассмотрение справедливо как для псевдоевклидовой геометрии, так и для римановой геометрии, однако для простоты мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь псевдоевклидовой геометрии.

Найдем вариацию Ли от полевых переменных, возникающую из-за преобразования координат. Согласно закону преобразования ковариантного вектора

$$A'_i(x') = A_k(x)\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \tag{9.28}$$

имеем

$$A'_i(x+\delta x) = A_i(x) - A_k(x)\frac{\partial \delta x^k}{\partial x^i},$$

откуда

$$\delta_L A_i(x) = -\delta x^k \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_k \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^i}, \tag{9.29}$$

или, в ковариантной форме,

$$\delta_L A_i(x) = -\delta x^k D_k A_i - A_k D_i \delta x^k. \tag{9.30}$$

Поскольку при преобразовании координат скалярная величина преобразуется по закону

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \tag{9.31}$$

имеем

$$\delta_L \varphi = -\delta x^k D_k \varphi. \tag{9.32}$$

Найдем теперь вариацию Ли от метрического тензора g_{ik}. Из закона преобразования тензора

$$g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} g_{lm}(x)$$

получим

$$g'_{ik}(x+\delta x) = g_{ik} - g_{il}\,\partial_k \delta x^l - g_{kl}\,\partial_i \delta x^l, \tag{9.33}$$

откуда

$$\delta_L g_{ik} = -g_{il}\,\partial_k \delta x^l - g_{kl}\,\partial_i \delta x^l - \delta x^l\,\partial_l g_{ik}. \tag{9.34}$$

Учитывая равенство

$$\partial_l g_{ik} = g_{ks}\Gamma^s_{il} + g_{is}\Gamma^s_{kl}, \tag{9.35}$$

запишем выражение (9.34) в ковариантных производных

$$\delta_{\mathrm{L}} g_{ik} = -g_{il} D_k \delta x^l - g_{kl} D_i \delta x^l. \tag{9.36}$$

Подставляя выражения (9.30), (9.32) и (9.36) в действие (9.25), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x \left[-\delta x^l\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} D_l\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i\right) - \right.$$
$$-\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l D_i \delta x^l - (g_{il} D_k \delta x^l + g_{kl} D_i \delta x^l)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{ik} g^{km}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{lm}}\right) + D_n J^n\right]. \tag{9.37}$$

Введем следующее обозначение:

$$T^{ik} = -2\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{il} g^{km}\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g^{lm}}\right). \tag{9.38}$$

Мы увидим в дальнейшем, что эта величина, впервые введенная Гильбертом, является тензором энергии-импульса системы полей.

Интегрируя по частям в выражении (9.37), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x \left[-\delta x^l\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi} D_l\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i - \right.\right.$$
$$\left. - D_i\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) + D_i (T^{ik} g_{lk})\right) +$$
$$\left. + D_n\left(J^n - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l \delta x^l + T^{in} g_{il}\delta x^l\right)\right]. \tag{9.39}$$

Подставляя в выражение (9.26) для вектора J^n значения вариаций $\delta_{\mathrm{L}}\varphi$, $\delta_{\mathrm{L}} A_i$ и $\delta_{\mathrm{L}} g_{ik}$ согласно формулам (9.30), (9.32) и (9.36) и группируя члены при δx^l и $D_k \delta x^l$, имеем

$$J^n - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l \delta x^l = -\tau^n_l \delta x^l - \sigma^{nk}_l D_k \delta x^l. \tag{9.40}$$

Здесь мы обозначили

$$\tau^n_l = -\mathfrak{L}\delta^n_l + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)} D_l\varphi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)} D_l A_i + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l. \tag{9.41}$$

Эту величину обычно называют каноническим тензором энергии-импульса, а величину

$$\sigma_l^{nk} = 2\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g_{ik})} g_{il} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_k)} A_l - 2\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n g^{lm})} g^{km} \qquad (9.42)$$

— тензором спина.

На основании (9.40) ковариантную дивергенцию в (9.39) представим в виде

$$D_n\left(J^n - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_n} A_l \delta x^l + T_l^n \delta x^l\right) = \delta x^l \left[D_n T_l^n - D_n \tau_l^n\right] + \\ + D_n \delta x^l \left[T_l^n - \tau_k^n - D_k \sigma_l^{kn}\right] - \sigma_l^{nk} D_n D_k \delta x^l. \qquad (9.43)$$

Используя это выражение, вариацию действия (9.39) можно записать в виде

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x \left[-\delta x^l\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i - \right.\right. \\ \left. - D_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) + D_i \tau_l^i\right) + D_n \delta x^l \left[T_l^n - \tau_l^n - D_k \sigma_l^{kn}\right] - \\ \left. - \sigma_l^{nk} D_n D_k \delta x^l\right] = 0. \qquad (9.44)$$

Так как объем интегрирования произволен, то отсюда следует, что подынтегральная функция всюду равна нулю:

$$-\delta x^l \left[\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i - D_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) + D_i \tau_l^i\right] + \\ + \left[T_l^n - \tau_l^n - D_k \sigma_l^{kn}\right] D_n \delta x^l - \sigma_l^{nk} D_n D_k \, \delta x^l = 0. \qquad (9.45)$$

Это выражение обращается в нуль для произвольных значений δx^l, независимо от выбора системы координат. В силу тензорного закона преобразования, если оно обращается в нуль в одной системе координат, то оно равно нулю в любой другой системе координат. Отсюда следуют тождества

$$\begin{gathered} D_i \tau_l^i + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} D_l A_i + D_i\left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} A_l\right) = 0; \\ T_l^n - \tau_l^n - D_k \sigma_l^{kn} = 0. \end{gathered} \qquad (9.46)$$

Что касается последнего члена в (9.45), то он должен обращаться в нуль в силу антисимметрии величины σ_l^{nk} по верхним индексам. Из антисимметрии тензора спина следует

$$D_l T^l_n = D_l \tau^l_n. \tag{9.47}$$

Используя (9.47), первое тождество (9.46) можно записать в виде

$$D_l T^i_l + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} D_l \varphi + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_l} D_l A_l - D_l \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_l} A_l \right) = 0. \tag{9.48}$$

Тождества (9.46) называются сильными законами сохранения, они выполняются в силу инвариантности действия при преобразовании координат.

Если мы учтем уравнения поля (9.12), то получим слабые законы сохранения

$$D_k T^k_l = 0; \quad T^k_l - \tau^k_l = D_p \sigma^{pk}_l, \tag{9.49}$$

где величина τ^k_l согласно уравнениям поля и (9.41) равна

$$\tau^k_l = -\mathfrak{L}\delta^k_l + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n \varphi)} D_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_i)} D_l A_i. \tag{9.50}$$

Канонический тензор энергии-импульса в общем случае несимметричен по своим индексам. Наличие слабого закона сохранения симметрического тензора энергии-импульса обеспечивает сохранение тензора момента импульса поля.

Определяя тензор момента импульса

$$M^{ikn} = x^k T^{in} - x^i T^{kn}, \tag{9.51}$$

легко установить с помощью (9.49) и определения (9.38), что

$$D_n M^{ikn} = 0. \tag{9.52}$$

Полученные нами слабые законы сохранения для тензора энергии-импульса и тензора момента импульса еще не свидетельствуют о сохранении энергии-импульса или момента количества движения для замкнутой системы физических полей. Существование интегральных законов сохранения для замкнутой системы связано со свойствами пространства-времени, а именно с существованием определенной группы движения пространства (метрики). Без наличия определенной группы движения пространства не могут существовать интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента импульса. Эти вопросы подробно рассмотрены в главе II.

Канонический тензор энергии-импульса особенно просто вычисляется, если использовать координаты, в которых метрический тензор диагонален (1, —1, —1, —1). В этом случае плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(\varphi(x),\ \partial_n\varphi(x),\ A_i(x),\ \partial_n A_i(x)). \tag{9.53}$$

Плотность лагранжиана не зависит явно от x, а зависит от координат через полевые переменные, поэтому имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^l}=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\partial_n\varphi+ \\ +\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_i}\partial_l A_i+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l\partial_n A_i. \tag{9.54}$$

Отсюда дифференцированием по частям получим

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^l}=\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\partial_l\varphi+\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_i}\partial_l A_i+ \\ +\partial_n\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l A_i\right]. \tag{9.55}$$

Применяя в этом тождестве уравнения поля (9.12), найдем

$$\partial_n\left[-\mathfrak{L}\delta_l^n+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l A_i\right]=0. \tag{9.56}$$

Под знаком дифференцирования мы имеем канонический тензор энергии-импульса, записанный в галилеевых координатах

$$\tau_l^n=-\mathfrak{L}\delta_l^n+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\partial_l\varphi+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)}\partial_l A_i. \tag{9.57}$$

В силу принципа стационарного действия уравнения поля не изменятся, если вместо плотности лагранжиана $\mathfrak{L}$ взять плотность лагранжиана $\mathfrak{L}'$:

$$\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+D_k f^k. \tag{9.58}$$

Поскольку мы рассматриваем лишь лагранжиан, содержащий производные от полей не выше первого порядка, то плотность вектора f^k должна быть построена из полей φ, A_i и метрических коэффициентов g_{ik}, g^{lm}. Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}D_k f^k=0;\quad \frac{\delta}{\delta A_i}D_k f^k=0,$$

если воспользоваться выражением

$$D_k f^k = \partial_k f^k = \frac{\partial f^l}{\partial g_{ik}} \partial_l g_{ik} + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi} \partial_k \varphi + \frac{\partial f^k}{\partial A_i} \partial_k A_i + \frac{\partial f^k}{\partial g^{lm}} \partial_k g^{lm}. \quad (9.59)$$

Выясним теперь, как изменяется канонический тензор энергии-импульса при таком изменении плотности лагранжиана:

$$\tau'^k_l = -\mathfrak{L}'\delta^k_l + \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial(\partial_k A_i)} D_l A_i + \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial(\partial_k \varphi)} D_l \varphi. \quad (9.60)$$

На основании (9.58) и (9.59) имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial(\partial_k \varphi)} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_k \varphi)} + \frac{\partial}{\partial(\partial_k \varphi)} D_p f^p = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_k \varphi)} + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi}. \quad (9.61)$$

На основании равенств (9.61) и (9.57) получим

$$\tau'^k_l = \tau^k_l + \left[\frac{\partial f^k}{\partial A_i} D_l A_i + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi} D_l \varphi - \delta^k_l D_m f^m\right]. \quad (9.62)$$

Так как

$$D_l f^k = \frac{\partial f^k}{\partial A_i} D_l A_i + \frac{\partial f^k}{\partial \varphi} D_l \varphi, \quad (9.63)$$

найдем

$$\tau'^k_l = \tau^k_l + D_m h^{mk}_l, \quad (9.64)$$

где $h^{mk}_l = -h^{km}_l$ — антисимметричный тензор третьего ранга

$$h^{mk}_l = \delta^m_l f^k - \delta^k_l f^m. \quad (9.65)$$

Таким образом, добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции изменяет канонический тензор энергии-импульса на дивергенцию от антисимметричного тензора третьего ранга.

Рассмотрим теперь, как при этом изменится симметрический тензор энергии-импульса, определенный по Гильберту:

$$T^{ik} = -2\left[\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ik}} - g^{im} g^{kl} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{ml}}\right]. \quad (9.66)$$

Добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции приведет к добавлению тензора вида

$$\Delta^{pq} = \frac{\delta}{\delta g_{pq}} D_k f^k - g^{pm} g^{ql} \frac{\delta}{\delta g^{ml}} D_k f^k. \quad (9.67)$$

С помощью (9.59) получим, например,

$$\frac{\partial}{\partial g_{qp}} D_k f^k = \frac{\partial^2 f^l}{\partial g_{pq} \partial g_{ik}} \partial_l g_{ik} + \frac{\partial^2 f^l}{\partial g_{pq} \partial \varphi} \partial_l \varphi + \\ + \frac{\partial^2 f^l}{\partial g_{pq} \partial A_i} \partial_l A_i + \frac{\partial^2 f^k}{\partial g_{pq} \partial g^{ml}} \partial_k g^{ml}. \quad (9.68)$$

На основании (9.59) имеем также

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_m g_{pq})} D_n f^n = \frac{\partial f^m}{\partial g_{pq}}. \quad (9.69)$$

Используя это выражение, найдем

$$\partial_m \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_m g_{pq})} D_n f^n \right) = \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq} \partial g_{ik}} \partial_m g_{ik} + \\ + \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq} \partial \varphi} \partial_m \varphi + \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq} \partial A_i} \partial_m A_i + \frac{\partial^2 f^m}{\partial g_{pq} \partial g^{ik}} \partial_m g^{ik}.$$

Сравнивая это выражение с (9.68), мы видим

$$\frac{\delta}{\delta g_{pq}} (D_n f^n) = \frac{\partial}{\partial g_{pq}} (D_n f^n) - \partial_m \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_m g_{pq})} D_n f^n \right) = 0. \quad (9.70)$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\delta}{\delta g^{ml}} (D_k f^k) = 0. \quad (9.71)$$

Таким образом, добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции не изменяет симметрического тензора энергии-импульса. Симметрический тензор энергии-импульса отличается от канонического на дивергенцию от тензора спина:

$$T_i^k - \tau_i^k = D_l \sigma_i^{lk}. \quad (9.72)$$

При изменении плотности лагранжиана на дивергенцию от плотности вектора дивергенция тензора спина также изменится, но сумма канонического тензора и дивергенции тензора спина останется неизменной. Это можно проверить и прямым вычислением.

Найдем теперь выражение для симметрического тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Как известно, плотность лагранжиана для этого поля имеет вид

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-g}\, F_{lm} F^{lm}. \quad (9.73)$$

Запишем ее через переменные F_{ik} и метрические коэффициенты:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,F_{ml}F_{pq}g^{pm}g^{ql}. \tag{9.74}$$

Мы видим, что плотность лагранжиана зависит от ковариантных компонент g_{ik}, которые входят в детерминант g, а также контравариантных компонент, которые входят в виде двух множителей. Так как

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{ik}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ik}, \tag{9.75}$$

то

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} = -\frac{1}{32\pi}\sqrt{-g}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}. \tag{9.76}$$

Аналогично

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{st}} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,F_{ml}F_{pq}\left[\frac{\partial g^{pm}}{\partial g^{st}}g^{lq} + g^{pm}\frac{\partial g^{lg}}{\partial g^{st}}\right].$$

Поскольку

$$\frac{\partial g^{pm}}{\partial g^{st}} = \frac{1}{2}\left(\delta_s^p\delta_t^m + \delta_t^p\delta_s^m\right),$$

то, используя свойства антисимметрии тензора $F_{lm} = -F_{ml}$, получим

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{st}} = -\frac{1}{8\pi}\sqrt{-g}\,F_{sq}F_{tl}g^{lq}. \tag{9.77}$$

Так как в плотность лагранжиана электромагнитного поля не входят производные от метрического тензора, то плотность симметрического тензора энергии-импульса будет равна

$$T^{ik} = -2\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} - g^{is}g^{kt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{st}}\right].$$

Подставляя в эту формулу выражения (9.76) и (9.77), найдем

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\left[-F^{im}F^{kl}g_{ml} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \tag{9.78}$$

Разделив это выражение на $\sqrt{-g}$, получим тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$t^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[-F^{im}F^{kl}g_{ml} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \tag{9.79}$$

Найдем теперь канонический тензор энергии-импульса

$$\tau_k^i = -\delta_k^i \mathfrak{L} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_i A_p)} \partial_k A_p. \tag{9.80}$$

Подставляя в это выражение лагранжиан поля, получим

$$\tau_k^i = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{ip} \partial_k A_p + \frac{1}{4} \delta_k^i F_{lm} F^{lm} \right]. \tag{9.81}$$

Легко убедиться, что

$$\tau^{ik} \neq \tau^{ki}. \tag{9.82}$$

Для тензора спина электромагнитного поля имеем

$$\sigma_k^{pi} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_p A_i)} A_k = -\frac{1}{4\pi} F^{pi} A_k. \tag{9.83}$$

Добавляя дивергенцию спина к каноническому тензору, получим симметрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля (Гильберта)

$$t_k^i = \tau_k^i + \partial_p \sigma_k^{pi} = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{ip} F_{kp} + \frac{1}{4} \delta_k^i F_{lm} F^{lm} \right] \tag{9.84}$$

или, умножая обе части равенства на g^{kn}, имеем

$$t^{in} = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{ip} F^{nl} g_{pl} + \frac{1}{4} g^{in} F_{lm} F^{lm} \right], \tag{9.85}$$

что совпадает с (9.78).

В заключение построим тензор энергии-импульса вещества. Как известно из § 8, плотность сохраняющейся массы равна

$$\mu = \frac{dm}{dV} = \sqrt{-g}\, \mu_0 u^0 \frac{1}{c}. \tag{9.86}$$

Так как величина $\frac{dm}{dV}$ не зависит от метрического тензора, а четырехмерная скорость u^i равна

$$u^i = \frac{cv^i}{\sqrt{g_{lk} v^l v^k}}; \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}, \tag{9.87}$$

то вариация выражения (9.86) по метрическому тензору будет равна нулю:

$$\delta_g \mu = u^0 \delta_g (\sqrt{-g}\, \mu_0) - \sqrt{-g}\, \mu_0 \frac{c^2 v^i v^k \delta g_{ik}}{2 (g_{mn} v^m v^n)^{3/2}} = 0. \tag{9.88}$$

Отсюда имеем

$$\delta_g(\sqrt{-g}\,\mu_0) = \sqrt{-g}\,\mu_0 \frac{u^i u^k}{2c^2}\,\delta g_{ik}. \tag{9.89}$$

Поскольку плотность лагранжиана действия вещества имеет вид

$$\mathfrak{L} = -\sqrt{-g}\,\mu_0 c^2,$$

то плотность тензора энергии-импульса вещества будет равна

$$t_{\text{c}}^{ik} = -2\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} = \sqrt{-g}\,\mu_0 u^i u^k. \tag{9.90}$$

Учитывая это выражение, а также формулу (9.85), суммарный тензор энергии-импульса вещества и электромагнитного поля принимает вид

$$t^{ik} = \mu_0 u^i u^k + \frac{1}{4\pi}\left[-F^{ip}F^{kl}g_{pl} + \frac{1}{4}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right]. \tag{9.91}$$

§ 10. Тензор энергии-импульса Белинфанте

В § 9 мы построили тензор энергии-импульса Гильберта с помощью произвольных бесконечно малых смещений δx^l в произвольной криволинейной системе координат. Этот путь построения тензора энергии-импульса является общим, однако он несколько сложен. Задача построения тензора энергии-импульса может быть упрощена, если ограничиться смещениями δx_i, удовлетворяющими уравнению Киллинга

$$\delta_L g_{ik} = -D_k\delta x_i - D_i\delta x_k = 0.$$

Поскольку пространство-время псевдоевклидово, то это всегда можно сделать. Более того, мы всегда можем построить все 10 независимых векторов Киллинга и с их помощью найти интегральные законы сохранения. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения замкнутой системы есть прямое следствие существования 10 векторов Киллинга. При этих смещениях в силу равенств (9.25) и (9.26) имеем

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int_\Omega d^4x\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi}\,\delta_L\varphi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta A_l}\,\delta_L A_l + D_n J^n\right); \tag{10.1}$$

$$J^n = \mathfrak{L}\delta x^n + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n\varphi)}\,\delta_L\varphi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_l)}\,\delta_L A_l. \tag{10.2}$$

Если поля φ и A_i удовлетворяют полевым уравнениям (9.12), найдем

$$\delta_c S = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} d^4x\,(D_n J^n) = 0, \tag{10.3}$$

откуда в силу произвольности объема интегрирования получим

$$D_n J^n = 0. \tag{10.4}$$

Подставляя в соотношение (10.2) выражения (9.30) и (9.32) для вариаций Ли $\delta_L A_i$, $\delta_L \varphi$, найдем

$$J^n = -\delta x^l \tau_l^n - \tilde{\sigma}_l^{nk} D_k \delta x^l, \tag{10.5}$$

где канонический тензор энергии-импульса имеет вид

$$\tau_l^n = -\mathfrak{L}\delta_l^n + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n \varphi)} D_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_i)} D_l A_i, \tag{10.6}$$

а тензор спина равен

$$\tilde{\sigma}_l^{nk} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_n A_k)} A_l. \tag{10.7}$$

Подставляя выражение для тока (10.5) в (10.4), имеем

$$D_n J^n = -\delta x_l D_n \tau^{nl} - [\tau^{nl} + D_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn}]\, D_n \delta x_l - \\ - \tilde{\sigma}^{l;\,nk} D_n D_k \delta x_l = 0. \tag{10.8}$$

В силу уравнений Киллинга имеем

$$D_n D_k \delta x_l = 0. \tag{10.9}$$

В галилеевой системе координат (10.8) имеет наиболее простой вид

$$-\delta x_l \partial_n \tau^{nl} - [\tau^{nl} + \partial_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn}]\, \partial_n \delta x_l = 0. \tag{10.10}$$

В галилеевой системе координат уравнения Киллинга

$$\partial_k \delta x_i + \partial_i \delta x_k = 0 \tag{10.11}$$

имеют общее решение в виде линейной функции от x^l

$$\delta x_i = \varepsilon_i + w_{il} x^l, \tag{10.12}$$

где ε_i — постоянный вектор, а w_{il} — антисимметричная матрица 4-го порядка

$$w_{il} + w_{li} = 0. \tag{10.13}$$

Подставляя в (10.10) смещение вида

$$\delta x_l = \varepsilon_l, \tag{10.14}$$

найдем

$$\partial_n \tau^{nl} = 0. \tag{10.15}$$

Аналогично для смещений типа

$$\delta x_l = w_{lm} x^m \tag{10.16}$$

имеем

$$(\tau^{nl} + \partial_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn}) w_{ln} = 0. \tag{10.17}$$

В силу антисимметрии и произвольности тензора w_{ln} отсюда находим, что величина

$$\tau^{nl} + \partial_k \tilde{\sigma}^{l;\,kn} \tag{10.18}$$

симметрична по индексам n и l. Следовательно,

$$\tau^{nl} - \tau^{ln} = -\partial_k (\tilde{\sigma}^{l;\,kn} - \tilde{\sigma}^{n;\,kl}). \tag{10.19}$$

Введем обозначение

$$H^{nlk} = \tilde{\sigma}^{l;\,kn} - \tilde{\sigma}^{n;\,kl} = -H^{lnk}. \tag{10.20}$$

Определим величину, антисимметричную по индексам k и n:

$$\sigma^{l;\,kn} = \frac{1}{2} (H^{nlk} + H^{nkl} - H^{kln}). \tag{10.21}$$

Тогда, следуя Белинфанте, определим

$$T^{nl} = \tau^{nl} + \frac{1}{2} \partial_k (H^{nlk} + H^{nkl} - H^{kln}). \tag{10.22}$$

Подставляя выражение (10.7) для тензора спина в определение (10.20), найдем

$$H^{nlk} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_n)} A^l - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_l)} A^n. \tag{10.23}$$

Нетрудно убедиться, что в силу равенств (10.19) и (10.20) тензор энергии-импульса удовлетворяет закону сохранения

$$\partial_n T^{nl} = 0; \quad \partial_l T^{nl} = 0 \tag{10.24}$$

и является симметричным.

Покажем теперь, что тензор Белинфанте есть не что иное, как тензор энергии-импульса Гильберта. Тензор Гильберта можно находить либо путем вычисления эйлеровской вариации по метрическим коэффициентам (для этой цели необходимо записать плотность лагранжиана в криволинейной системе координат), либо используя выражение для канонического тензора энергии-импульса и тензора спина по формуле (9.49). Второй путь построения можно осуществить, оставаясь в галилеевой системе координат. Метод Белинфанте, как мы увидим, и есть построение тензора Гильберта таким способом. Действительно, ранее в (9.47) и (9.49) мы получили слабые законы сохранения, которые, если поднять индексы у тензоров и перейти к галилеевой системе координат, можно записать в виде

$$\partial_k T^{kl} = 0; \quad T^{kl} - \tau^{kl} = \partial_p \sigma^{l;\, pk}; \quad \partial_k \tau^{kl} = 0. \tag{10.25}$$

Тензор энергии-импульса Гильберта T^{kl} симметричен по определению (9.38). В силу второго равенства величина

$$\tau^{kl} + \partial_p \sigma^{l;\, pk} = T^{kl} \tag{10.26}$$

также симметрична, а, следовательно,

$$\tau^{kl} - \tau^{lk} = -\partial_p (\sigma^{l;\, pk} - \sigma^{k;\, pl}). \tag{10.27}$$

Обозначая

$$H^{klp} = \sigma^{l;\, pk} - \sigma^{k;\, pl}, \tag{10.28}$$

найдем отсюда

$$\sigma^{l;\, pk} = \frac{1}{2} (H^{klp} + H^{kpl} - H^{plk}). \tag{10.29}$$

Подставляя это выражение в (10.26), представим тензор Гильберта в форме Белинфанте

$$T^{kl} = \tau^{kl} + \frac{1}{2} \partial_p [H^{klp} + H^{kpl} - H^{plk}]. \tag{10.30}$$

В галилеевой системе координат выражение (9.41) для канонического тензора энергии-импульса имеет вид

$$\tau_l^k = -\mathfrak{L}\delta_l^k + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \partial_l \varphi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_k A_i)} \partial_l A_i. \tag{10.31}$$

Сравнивая (10.22) с (10.30) и принимая во внимание выражения (10.31) и (10.23), мы видим, что тензор Белинфанте есть не что иное, как тензор Гильберта в галилеевой системе координат.

Вернемся теперь опять к рассмотрению основ теории относительности. К сожалению, по этим вопросам в литературе имеется много путаницы и неверных утверждений. Внести ясность в эти вопросы и в то же время расширить область применения специальной теории относительности и является нашей главной задачей. Эти вопросы нами частично затрагивались ранее.

§ 11. Координатная скорость света

Найдем теперь координатную скорость света. Как известно, движение светового сигнала описывается изотропным интервалом:

$$ds^2 = 0.$$

Вводя обозначение

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$$

для координатной скорости света и учитывая, что подъем и опускание тензорных индексов у этой скорости производится с помощью тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ (4.14):

$$v_\alpha = \varkappa_{\alpha\beta} v^\beta; \quad v^2 = \varkappa_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta,$$

интервал (4.11) для этого случая представим в виде

$$c^2\left[\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha} v^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - v^2 = 0. \qquad (11.1)$$

Записывая вектор скорости v^α в виде

$$v^\alpha = v e^\alpha, \qquad (11.2)$$

где e^α — единичный вектор в направлении скорости v^α,

$$\varkappa_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta = 1, \qquad (11.3)$$

из соотношения (5.1) получим

$$v = c\left[\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha} e^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} \frac{v}{c}\right].$$

Разрешая это уравнение относительно v, имеем

$$v = \frac{c\sqrt{g_{00}}}{1 - \frac{g_{0\alpha} e^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}}. \qquad (11.4)$$

Таким образом, величина координатной скорости зависит как от метрических коэффициентов, так и от направления, причем выражение, стоящее в знаменателе (11.4), всегда положительно и не обращается в нуль.

Чтобы в этом убедиться, умножим $\varkappa_{\alpha\beta}$ на $e^{\alpha}e^{\beta}$. В силу определения (11.3) это — единица. С другой стороны, получим

$$1=\varkappa_{\alpha\beta}e^{\alpha}e^{\beta}=-g_{\alpha\beta}e^{\alpha}e^{\beta}+\left[\frac{g_{0\alpha}e^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\right]^{2}. \qquad (11.5)$$

Для допустимых координатных систем квадратичная форма $g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}$, а следовательно, и квадратичная форма $g_{\alpha\beta}e^{\alpha}e^{\beta}$, является отрицательно определенной:

$$g_{\alpha\beta}e^{\alpha}e^{\beta}<0. \qquad (11.6)$$

Тогда из (11.5) и (11.6) получим

$$\left[\frac{g_{0\alpha}e^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\right]^{2}=1+g_{\alpha\beta}e^{\alpha}e^{\beta}<1.$$

Таким образом, знаменатель в выражении (11.4) никогда не обращается в нуль.

В том случае, когда метрические коэффициенты g_{ik} постоянны, скорость v также будет постоянной, но разной для различных направлений движения в пространстве. Именно с помощью такого определения скорости света фактически осуществлялась Эйнштейном, Паули, Рейхенбахом, Мандельштамом и др. синхронизация часов в разных точках пространства в инерциальной системе отсчета. Мы видим, что синхронизация часов, определенная таким образом, зависит от выбора системы координат пространства-времени в инерциальной системе отсчета, а поэтому она не является сколь-нибудь важным физическим актом. В галилеевых координатах эта скорость равна c и не зависит от направления движения в пространстве. Подчеркивая именно это обстоятельство, Паули, обсуждая постулат о постоянстве скорости света, писал [19]: «Об **универсальном** постоянстве скорости света в пустоте не может быть речи уже потому, что скорость света постоянна только в галилеевых системах отсчета»[1]. Но этот

---

[1]) Здесь Паули, следуя Эйнштейну, имеет в виду галилеевы координаты.

вывод основан на определении, как мы теперь видим, координатной скорости света, а не физической. Делать же заключения из нефизических понятий нельзя. Как же определить понятие физической скорости и, в частности, физической скорости света?

Для того чтобы это сделать, необходимо знать, во-первых, расстояние между точками A и B в пространстве и, во-вторых, промежуток времени, в течение которого сигнал из точки A дошел до точки B. Но, чтобы определить первое и второе, необходимо иметь представление о пространстве и времени или более точно знать геометрию пространства-времени, а это стало возможным лишь после открытия Минковским псевдоевклидовой геометрии пространства и времени. Однако формальная интерпретация и непонимание открытия Минковского затрудняли понимание сути теории относительности до сих дней. Об этом свидетельствуют многочисленные учебники, монографии, статьи и изыскания разных авторов.

Ранее в (4.12) мы дали выражение физического времени через координатные переменные пространства-времени

$$d\tau = dt\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha}dx^{\alpha}}{c\sqrt{g_{00}}}.$$

Аналогично ранее мы выразили в (4.13) расстояние между двумя бесконечно близкими точками пространства через пространственные переменные

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^{\alpha}\,dx^{\beta}.$$

Отсюда величина физической скорости равна

$$V = \frac{dl}{d\tau}.$$

Поскольку для светового сигнала интервал равен нулю, то физическая скорость света в инерциальной системе отсчета в любых допустимых системах координат пространства-времени всегда равна c и не зависит от направления движения:

$$V = \frac{dl}{d\tau} = c.$$

Отсюда следует, что постулат о постоянстве скорости света, как мы установили, справедлив в инерциальной системе отсчета всегда, независимо от выбора допустимых координат пространства-времени. Таким образом, ошибка проистекала из-за того, что имели дело не с физической скоростью света, а с координатной. В частном случае галилеевых координат координатная скорость света совпадает с физической. В любых других координатах в инерциальной системе отсчета физическая скорость всегда отличается от координатной. Последняя, вообще говоря, может быть сколь угодно большой.

Определение физической скорости света, которое следует из псевдоевклидовой структуры геометрии пространства-времени, позволяет в инерциальной системе отсчета в любых допустимых координатах пространства-времени осуществить единственным образом синхронизацию часов в разных точках пространства. Именно введение физической скорости света вместо координатной, с которой фактически всегда имели дело, полностью снимает все вопросы неоднозначности, которые ранее якобы возникали при описании физических явлений. Таким образом, постулат о постоянстве скорости света можно сформулировать в инерциальной системе отсчета в любых допустимых координатах пространства-времени как частное следствие псевдоевклидовой структуры пространства-времени на основе введенного нами понятия физической скорости. Но и в такой формулировке этот постулат имеет ограниченный смысл, поскольку в произвольной (ускоренной) системе отсчета он не выполняется, хотя описание физических явлений возможно в любой системе отсчета, поскольку теория относительности — это теория пространства-времени. Отсюда очевидно, что, основываясь на постулатах о постоянстве скорости света, в принципе, нельзя выйти за границы инерциальных систем отсчета в специальной теории относительности.

Представление же о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени является более общим и фундаментальным. Оно позволяет с единой точки зрения сформулировать физические законы как в инерциальных, так и в неинерциальных (ускоренных) системах отсчета и этим самым дает возможность расширить область применения специальной теории относительности, что имеет не только общетеоретическое, но и прикладное значение. Рассмотрим историю данного вопроса.

В 1907 г. (статья 8 собр. соч. [8]) Эйнштейн, анализируя гравитацию, пришел к выводу: «... и в дальнейшем мы будем предполагать полную физическую равноценность гравитационного поля и соответствующего ускорения системы отсчета». Далее, развивая эту идею, которую он сформулировал как принцип эквивалентности, Эйнштейн в 1913 г. (статья 21 собр. соч. [8]) отмечал: «В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования». В следующей статье этого же года (статья 22 собр. соч. [8]) он пишет: «В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \sum_i dx_i^2$, а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию (имеется в виду общая теория относительности — А. Л.), в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент наиболее общего вида

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k.\text{»}$$

Величины g_{ik} Эйнштейн объявляет характеристиками гравитационного поля. Эти высказывания (статьи 21 и 22 собр. соч. [8]) Эйнштейна относительно специальной теории относительности сильно сужают ее содержание. Уже на этом этапе видно, что Эйнштейн не осознал глубокого физического содержания открытия Минковского.

Как мы уже знаем, Пуанкаре и Минковский открыли псевдоевклидову геометрию и установили единство пространства и времени, но отсюда, следуя им, интервал между событиями в произвольной допустимой системе координат пространства-времени можно записать в общем виде:

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

В частном случае галилеевых координат он может быть записан так:

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

или, в дифференциальном виде,

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Таким образом, в специальной теории относительности речь идет не о постулировании интервала в виде

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2,$$

как считал Эйнштейн, а речь идет о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, определяемой интервалом

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$$

с метрическим тензором g_{ik}, для которого тензор кривизны Римана R_{iklm} равен нулю. Почему Эйнштейн не понял этого? По-видимому, это объясняется тем, что специальную теорию относительности он воспринимал только через постулат о постоянстве скорости света в галилеевых координатах, а ускоренные системы отсчета — на основании принципа эквивалентности отождествлял с гравитацией. В литературе и до сих пор мы встречаемся с непониманием открытия Минковского, а следовательно, и сущности специальной теории относительности. Без творческого изучения даже великого наследия прошлого наука не может существовать. Эту истину мы все хорошо знаем, но не всегда ей следуем, поскольку это требует много времени и размышлений. Ведь легче пересказать, чем творчески переосмыслить. Особенно важно изучение основополагающих работ, ибо в них, как нигде, можно проследить зарождение и развитие великих идей.

Как я уже упоминал, в общем случае следует различать два вида величин: координатные и физические. Координатные величины зависят от произвола в выборе координатно-временной сетки, используемой для описания явлений. Они задаются определенным способом измерений. Физическими величинами мы называем такие величины, которые являются объективными характеристиками пространства, времени и материи. Поэтому для построения физических величин необходимо наряду с координатными величинами использовать и метрический тензор пространства-времени, который дает возможность избавиться от влияния произвола в выборе координат. Так, например, физические величины $d\tau$ и dl^2, определяемые формулами

(4.12) и (4.13), не зависят от выбора системы координат в данной инерциальной системе отсчета, так как они инвариантны относительно группы преобразований (9.1).

Здесь следует отметить, что выбор тех или иных координат (x, y, z, t) для описания какого-либо явления в большой степени произволен и соответствует выбору той или иной координатно-временной сетки или, как иногда говорят, арифметизации точек пространства-времени в псевдоевклидовом пространстве-времени, аналогично тому, как на обычной плоскости мы можем вести различные системы координат: косоугольные, криволинейные или, вообще, гауссовы.

Однако — и это следует подчеркнуть — процедура построения координатной сетки, т. е. сопоставления каждой точке пространства-времени набора четырех чисел (x, y, z, t), является процедурой операционной, предполагающей произвольный, но определенный физический способ арифметизации пространства-времени.

Следует отметить, что, хотя выбор координат и является произвольным, эти координаты должны быть допустимыми, т. е. позволяющими реализовать соответствующую координатную систему с помощью реальных физических процессов. Для этого необходимо, чтобы компонента g_{00} метрического тензора была положительной величиной, а квадратичная форма, построенная с использованием пространственных компонент $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора, была отрицательно определенной:

$$g_{00} > 0, \quad g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} < 0. \tag{11.7}$$

Для выполнения последнего из этих условий в силу критерия Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$g_{11} < 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \tag{11.8}$$

Отметим также, что в силу условий (11.7) квадратичная форма

$$\varkappa_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} = -g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} + \frac{(g_{0\alpha}\, dx^{\alpha})^2}{g_{00}} \tag{11.9}$$

будет всегда положительно определенной, а поэтому детерминанты

$$\Delta_1 = \varkappa_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} \\ \varkappa_{13} & \varkappa_{23} & \varkappa_{33} \end{vmatrix}$$

также будут всегда положительными: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Это дает нам возможность провести следующее преобразование:

$$dx'^1 = \frac{\varkappa^1_\alpha \, dx^\alpha}{\sqrt{\Delta_1}};$$

$$dx'^2 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \, dx^2 + \frac{(\varkappa_{23}\varkappa_{11} - \varkappa_{12}\varkappa_{13})}{\sqrt{\Delta_2 \Delta_1}} \, dx^3;$$

$$dx'^3 = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta_2}} \, dx^3,$$

где dx'^α в римановом пространстве не являются полными дифференциалами. Данное преобразование приводит квадратичную форму (11.9) к диагональному виду:

$$dl^2 = \varkappa_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta = (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2.$$

Таким образом, встав на точку зрения, что единое пространство-время обладает псевдоевклидовой геометрией, и рассмотрев с этой точки зрения системы координат, мы смогли по-новому взглянуть уже и на принцип относительности, а главное, существенно расширить область применения специальной теории относительности.

§ 12. Обобщенные инерциальные системы отсчета

Рассмотрим теперь произвольное линейное преобразование от галилеевых координат (X, Y, Z, T) к некоторым координатам (x, y, z, t):

$$\begin{aligned} T &= a_0 t + a_1 x + a_2 y + a_3 z; \\ X &= a_4 t + a_5 x + a_6 y + a_7 z; \\ Y &= a_8 t + a_9 x + a_{10} y + a_{11} z; \\ Z &= a_{12} t + a_{13} x + a_{14} y + a_{15} z. \end{aligned} \qquad (12.1)$$

Не ограничивая общности, потребуем, чтобы пространственные оси новой системы (x, y, z) были ортогональны друг другу. Тогда, с точностью до поворота пространственных систем координат, преобразование (12.1) будет эквивалентно преобразованию

$$T = qx + pt; \quad X = ax + bt; \quad Y = y; \quad Z = z, \tag{12.2}$$

где a, b, p, q — некоторые постоянные.

Взяв дифференциалы от правых и левых частей этих равенств и подставив в выражение для интервала (2.13), получим

$$ds^2 = c^2 g_{00}\, dt^2 + 2cg_{01}\, dt\, dx + g_{11}\, dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{12.3}$$

где

$$g_{00} = p^2 - \frac{b^2}{c^2}; \quad g_{01} = c\left(pq - \frac{ab}{c^2}\right); \quad g_{11} = c^2q^2 - a^2; \quad g_{22} = g_{33} = -1. \tag{12.4}$$

Для того чтобы преобразование (12.2) было допустимым, мы должны обеспечить выполнение следующих условий:

$$p^2 - \frac{b^2}{c^2} > 0; \quad c^2q^2 - a^2 < 0. \tag{12.5}$$

Метрика (12.3) описывает произвольную инерциальную систему с координатами, несколько отличными от галилеевых координат.

Определим теперь координатную скорость световой волны. Для световой волны интервал равен нулю.

Вводя обозначения

$$v^x = \frac{dx}{dt}; \quad v^y = \frac{dy}{dt}; \quad v^z = \frac{dz}{dt}$$

для компонент координатной скорости светового сигнала, выражение (12.3) запишем в виде

$$g_{11}(v^x)^2 + 2cg_{01}v^x + c^2g_{00} - (v^y)^2 - (v^z)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно v^x, получим

$$v^x = c\left[\frac{-g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 - g_{11}\left[g_{00} - \frac{(v^y)^2 + (v^z)^2}{c^2}\right]}}{g_{11}}\right].$$

Таким образом, имеем два значения корня: одно положительное, другое отрицательное. Если световой сигнал распространяется вдоль оси x, то это выражение упрощается:

$$\begin{aligned} c_1 &= c\,\frac{-g_{01}-\sqrt{g_{01}^2-g_{00}g_{11}}}{g_{11}} > 0; \\ c_2 &= c\,\frac{-g_{01}+\sqrt{g_{01}^2-g_{00}g_{11}}}{g_{11}} < 0, \end{aligned} \qquad (12.6)$$

где c_1 — координатная скорость света в положительном направлении оси x; c_2 — координатная скорость света в противоположном направлении.

Величина координатной скорости света, как мы видели, определяется выражением (11.4), а единичный вектор e^α удовлетворяет соотношению (11.3). В рассматриваемом нами случае входящие в эти выражения компоненты метрического тензора равны

$$g_{02}=0; \quad g_{03}=0; \quad \varkappa_{11}=-g_{11}+\frac{g_{01}^2}{g_{00}}>0;$$
$$g_{01}\neq 0; \quad g_{00}>0; \quad \varkappa_{22}=1; \quad \varkappa_{33}=1; \quad \varkappa_{\alpha\beta}=0; \quad \alpha\neq\beta.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (11.3), получим

$$\varkappa_{11}(e^1)^2+(e^2)^2+(e^3)^2=1.$$

Поэтому единичный вектор e^α в направлении скорости света будет иметь компоненты

$$e^1=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\varkappa_{11}}}; \quad e^2=\sin\theta\sin\varphi; \quad e^3=\cos\theta. \qquad (12.7)$$

Теперь из выражения (11.4) мы можем определить величину координатной скорости света:

$$v=\frac{c\sqrt{g_{00}}}{1-\dfrac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}}\sin\theta\cos\varphi}. \qquad (12.8)$$

Поскольку величина $g_{01}/\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}$ всегда меньше единицы, то в пространстве скоростей выражение (12.8) описывает эллипсоид вращения (см. рис. 2). Сечение этого эллипсоида плоскостью xy $(\theta=\pi/2)$ имеет вид эллипса

$$v=\frac{c\sqrt{g_{00}}}{1-\dfrac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}}\cos\varphi}$$

с эксцентриситетом $e = g_{01}/\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}} < 1$ и параметром $p = c\sqrt{g_{00}}$, а сечение плоскостью yz $(\varphi = \pi/2)$ является окружностью радиуса $v = c\sqrt{g_{00}}$.

Таким образом, величина координатной скорости света в каком-либо направлении определяется метрикой пространства-времени.

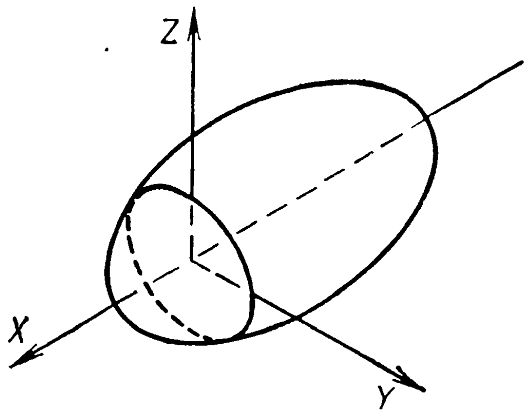

Рис. 2. Эллипсоид координатной скорости света

В общем случае инерциальной системы координат

$$c_1 \neq -c_2$$

скорость света в положительном направлении оси x не равна скорости света в противоположном направлении.

Из равенств (12.6) мы можем найти, что

$$c_1 + c_2 = -2c\,\frac{g_{01}}{g_{11}}; \quad c_1 c_2 = c^2\,\frac{g_{00}}{g_{11}}.$$

Отсюда следует, что

$$g_{11} = \frac{c^2}{c_1 c_2}\,g_{00}; \quad 2g_{01} = -c g_{00}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right). \qquad (12.9)$$

Поэтому в силу выражений (12.7) — (12.9) компоненты координатной скорости света $v^\alpha = ve^\alpha$ мы можем записать в виде

$$v^1 = \frac{2c_1c_2 \sin\theta\cos\varphi}{c_2 - c_1 + (c_2 + c_1)\sin\theta\cos\varphi};$$

$$v^2 = \frac{c\sqrt{g_{00}}\sin\theta\sin\varphi}{1 + \frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}\sin\theta\cos\varphi}; \qquad (12.10)$$

$$v^3 = \frac{c\sqrt{g_{00}}\cos\theta}{1 + \frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}\sin\theta\cos\varphi}.$$

Из выражений (12.10) можно убедиться, что значения координатной скорости света в прямом $(\theta = \theta_0,\ \varphi = \varphi_0)$ и противоположном $(\theta = \pi - \theta_0,\ \varphi = \varphi_0 + \pi)$ направлениях в общем случае не равны. В частности, при $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$ в прямом направлении имеем $v^1 = c_1$, а в противоположном $v^1 = c_2$.

Используя соотношения (12.9) между различными компонентами метрического тензора, выражение (12.3) для интервала мы можем записать в виде

$$ds^2 = c^2 g_{00}\left[dt^2 - \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)dx\,dt + \frac{dx^2}{c_1 c_2}\right] - dy^2 - dz^2. \quad (12.11)$$

Интервал (12.11) описывает достаточно произвольную инерциальную систему, в которой координатные скорости света в противоположных направлениях в общем случае не равны. В случае равенства $c_1 = -c_2 = c$ интервал (12.11) принимает галилеев вид (2.13).

Таким образом, в произвольной инерциальной системе отсчета постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света (в его формулировке) не выполняется, но тем не менее это обстоятельство никоим образом не сказывается на возможности описания физической реальности в этих системах отсчета. Конечно, зная псевдоевклидову структуру пространства-времени, как мы видели, можно дать общую формулировку постулата о постоянстве скорости света в инерциальной системе отсчета и для любых допустимых координат пространства-времени.

§ 13. Преобразования между различными обобщенными инерциальными системами отсчета

Рассмотрим некоторую инерциальную систему отсчета, в которой интервал имеет вид (12.11). Найдем собственную группу преобразований координат, оставляющих эту метрику форминвариантной.

Как мы знаем, в случае галилеевой метрики (2.13) данная собственная группа, т. е. группа преобразований координат с якобианом, равным $+1$, является десятипараметрической и состоит из трех собственных подгрупп: четырехпараметрической подгруппы трансляций временной и пространственной координат, трехпараметрической подгруппы трехмерных поворотов системы координат и трехпараметрической подгруппы лоренцевских вращений.

Покажем теперь, что в случае метрики (12.11) также будет существовать десятипараметрическая группа инерциальных систем отсчета, в которых координатная скорость света не равна c и зависит от направления распространения. Причем преобразования, соответствующие переходу от одной инерциальной системы отсчета этой группы к другой, оставляют метрику форминвариантной (а следовательно, все уравнения физики будут иметь в любой из этих систем отсчета одинаковую функциональную зависимость от координат, поэтому никаким физическим экспериментом мы не сможем определить, в какой из данной бесконечной совокупности систем отсчета мы находимся), и описание различных физических процессов в этих инерциальных системах отсчета приводит к результатам, которые совпадают с результатами соответствующих экспериментов.

Найдем сначала трехпараметрическую подгруппу преобразований, соответствующую переходу между различными инерциальными системами отсчета, оставляющими метрику форминвариантной.

Поскольку ось x в выражении (12.11') для интервала является выделенной, то следует ожидать, что искомое преобразование имеет наиболее простой вид в случае, когда относительная скорость двух инерциальных систем отсчета направлена вдоль оси x. Поэтому сначала рассмотрим этот частный случай, позволяющий с минимальной громоздкостью математических выкладок наиболее наглядно показать все имеющиеся возможности. Обобщение же на случай, когда относительная скорость двух инерциальных систем отсчета имеет произвольное направление, производится тривиально и с принципиальной точки зрения не дает ничего нового.

Вполне очевидно, что в рассматриваемом случае искомое преобразование является линейным:

$$\begin{aligned} x_{\text{с}} &= a x_{\text{н}} + b t_{\text{н}}; & t_{\text{с}} &= q x_{\text{н}} + p t_{\text{н}}; \\ y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}; & z_{\text{с}} &= z_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Требование форминвариантности метрики (12.11) при преобразовании (13.1) означает, что при этом преобразовании метрика (12.11) должна перейти в метрику

$$ds^2 = c^2 g_{00}\left[dt_{\text{н}}^2 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) dt_{\text{н}}\, dx_{\text{н}} + \frac{dx_{\text{н}}^2}{c_1 c_2}\right] - dy_{\text{н}}^2 - dz_{\text{н}}^2. \tag{13.2}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей равенств (13.1), подставим их в выражение (12.11). Из сравнения полученного выражения с метрикой (13.2) следует, что требование форминвариантности эквивалентно условиям

$$\begin{gathered}\Phi_1\Phi_1 = 1; \quad Q_1Q_2 = \frac{1}{c_1c_2}; \\ Q_1\Phi_2 + Q_2\Phi_1 = -\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right),\end{gathered} \tag{13.3}$$

где введены обозначения

$$Q_1 = q - \frac{a}{c_1}; \quad Q_2 = q - \frac{a}{c_2}; \quad \Phi_1 = p - \frac{b}{c_1}; \quad \Phi_2 = p - \frac{b}{c_2}. \tag{13.4}$$

Решение системы уравнений (13.3), соответствующее преобразованиям с якобианом, равным $+1$, имеет вид

$$\Phi_2 = \frac{1}{\Phi_1}; \quad Q_1 = -\frac{\Phi_1}{c_1}; \quad Q_2 = -\frac{1}{c_2\Phi_1}. \tag{13.5}$$

Определяя из равенств (13.4) и (13.5) параметры a, b, p, q и подставляя их в выражение (13.1), получим

$$\begin{aligned}x_{\text{с}} &= \frac{(c_1 - c_2\Phi_1^2)\,x_{\text{н}} + c_1c_2(\Phi_1^2 - 1)\,t_{\text{н}}}{\Phi_1(c_1 - c_2)}; \\ t_{\text{с}} &= \frac{(1 - \Phi_1^2)\,x_{\text{н}} + (c_1\Phi_1^2 - c_2)\,t_{\text{н}}}{\Phi_1(c_1 - c_2)}.\end{aligned} \tag{13.6}$$

Поскольку преобразования (13.6) должны описывать переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, то необходимо потребовать, чтобы какая-либо точка «старой» системы отсчета (например, начало координат) в «новой» системе отсчета двигалась с координатной скоростью v против оси x по закону $x_{\text{н}} = -vt_{\text{н}}$.

Подставляя в первое из выражений (13.6) $x_{\text{с}} = 0$, $x_{\text{н}} = -vt_{\text{н}}$, найдем

$$\Phi_1^2 = \frac{c_1(v + c_2)}{c_2(v + c_1)}.$$

Тогда преобразования (13.6) примут вид

$$\begin{aligned} x_с &= \frac{x_н + vt_н}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\ t_с &= \frac{t_н\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right) - \frac{v}{c_1c_2}x_н}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\ y_с &= y_н; \quad z_с = z_н. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x_н &= \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right)x_с - vt_с}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\ t_н &= \frac{t_с + \frac{v}{c_1c_2}x_с}{\sqrt{(1+v/c_1)(1+v/c_2)}}; \\ y_н &= y_с; \quad z_н = z_с. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Таким образом, в случае метрики (12.11) формулы преобразования, соответствующие переходу между различными инерциальными системами отсчета, существенно отличаются от преобразований Лоренца. В частном случае $c_1 = -c_2 = c$ преобразования (13.7) и (13.8) переходят в преобразования Лоренца. Следует также отметить, что если прямые и обратные преобразования Лоренца связаны достаточно просто изменением v на $-v$, то в общем случае между преобразованиями (13.7) и (13.8) такой связи нет.

Преобразования (13.7) оставляют выражение (12.11) для интервала форминвариантным и заменяют собой преобразования Лоренца в случае обобщенных инерциальных систем отсчета. В рассмотренном нами случае относительная координатная скорость $\mathbf{v}$ (параметр группы преобразования) обобщенных инерциальных систем отсчета была направлена вдоль оси x. Если же относительная скорость инерциальных систем отсчета имеет составляющие и вдоль других осей, то формулы преобразования существенно усложняются.

Так, например, если относительная (физическая) скорость инерциальных систем отсчета, у которых пространственные оси параллельны и одинаково направлены, имеет составляющие $\mathbf{V} = [V^x, V^y, 0]$, то преобразования, оставляющие форминвариантной метрику (12.11) и соответствующие переходу между различными обобщенными инерциальными системами отсчета, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
x_{\text{с}} = \frac{2c}{c_2-c_1}\Bigg[& x_{\text{н}}\left[\frac{c_2-c_1}{2c}\left(\frac{V_y^2}{V^2}+\frac{V_x^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)-\right. \\
& \left.-\frac{c_1+c_2}{2c^2}\frac{V^x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\frac{y_{\text{н}}}{\sqrt{-g_{11}}}\left[\frac{(c_2-c_1)V^xV^y}{2cV^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right)-\right. \\
& \left.-\frac{c_1+c_2}{2c^2}\frac{V^y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+t_{\text{н}}\left[\frac{c_1^2-c_2^2}{4c}\left(\frac{V_y^2}{V^2}+\frac{V_x^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)-\right. \\
& \left.-\frac{c_1^2-c_2^2}{4c\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{c_1c_2V^x}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]\Bigg]; \\
y_{\text{с}} = \sqrt{-g_{11}}\Bigg[& x_{\text{н}}\frac{V^xV^y}{V^2}\left[\frac{1}{1-V^2/c^2}-1\right]+ \\
& +\frac{y_{\text{н}}}{\sqrt{-g_{11}}}\left[\frac{V_x^2}{V^2}+\frac{V_y^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+ \\
& +t_{\text{н}}\left[\frac{c_1-c_2}{2c}\frac{V^y}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{c_1+c_2}{2}\frac{V^xV^y}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right)\right]\Bigg];
\end{aligned} \tag{13.9}$$

$$\begin{aligned}
t_{\text{с}} = \frac{2c}{(c_1-c_2)\sqrt{1-V^2/c^2}}\Bigg[& \frac{x_{\text{н}}V^x}{c^2}+\frac{y_{\text{н}}V^y}{c^2\sqrt{-g_{11}}}+ \\
& +t_{\text{н}}\left[\frac{c_1-c_2}{2c}-\frac{(c_1+c_2)V^x}{2c^2}\right]\Bigg];
\end{aligned}$$

$$z_{\text{с}} = z_{\text{н}}.$$

При $c_1 = -c_2 = c$ преобразования (13.9) переходят в соответствующие преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned}
X_{\text{с}} = {} & X_{\text{н}}\left[\frac{V_y^2}{V^2}+\frac{V_x^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+ \\
& +Y_{\text{н}}\frac{V^xV^y}{V^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right]+\frac{V^xT_{\text{н}}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \\
Y_{\text{с}} = {} & X_{\text{н}}\frac{V^xV^y}{V^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right]+ \\
& +Y_{\text{н}}\left[\frac{V_x^2}{V^2}+\frac{V_y^2}{V^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\frac{V^yT_{\text{н}}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \\
T_{\text{с}} = {} & \frac{X_{\text{н}}V^x+Y_{\text{н}}Y^y+c^2T_{\text{н}}}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad Z_{\text{с}} = Z_{\text{н}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, и в общем случае произвольных инерциальных систем отсчета существует трехпараметрическая (параметрами которой являются 3 компоненты относительной скорости **V**) подгруппа преобразований координат, оставляющих метрику форминвариантной и соответствующих переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

§ 14. Подгруппа трансляций и вращений

Покажем теперь, что в случае обобщенных инерциальных систем отсчета существуют подгруппы трансляций и трехмерных вращений, оставляющих метрику (12.11) форминвариантной.

Легко убедиться, что подгруппа трансляций временной ($i=0$) и пространственных ($i=1, 2, 3$) координат

$$x_{\text{с}}^i = x_{\text{н}}^i + a^i \tag{14.1}$$

на постоянный вектор a^i оставляет метрику (12.11) форминвариантной. Действительно, из выражения (14.1) следует, что

$$dx_{\text{с}}^i = dx_{\text{н}}^i.$$

Используя это соотношение и учитывая, что компоненты метрического тензора в выражении (12.11) не зависят от координат явным образом, метрику (12.11) мы можем записать в виде (13.2), что и доказывает ее форминвариантность при преобразовании (14.1).

Замечая далее, что метрика (12.11) в плоскости yz совпадает с метрикой евклидовой плоскости, заключаем, что метрика (12.11) остается форминвариантной и при преобразовании поворота трехмерной системы координат вокруг оси x на произвольный постоянный угол.

Найдем еще два преобразования, описывающие в одной и той же обобщенной инерциальной системе отсчета повороты вокруг осей y и z на произвольные постоянные углы и оставляющие метрику (12.11) форминвариантной. Тогда поворот вокруг произвольной оси в обобщенной инерциальной системе отсчета будет описываться соответствующим произведением поворотов вокруг осей x, y и z, взятых в определенном порядке. Заметим также, что нам достаточно найти преобразование поворота вокруг одной из осей, скажем, вокруг оси y, так как поворотом вокруг оси x мы всегда можем совместить любую ось вращения, лежащую в плоскости xy, с осью y.

Как известно [14], наиболее общее преобразование координат, не изменяющее системы отсчета, имеет вид

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^{\beta}); \quad x'^{0} = f^{0}(x^{\beta}, x^{0}).$$

В силу симметрии задачи искомые преобразования координат запишем в виде

$$\begin{aligned} x_{\text{с}} &= F(x_{\text{н}}, z_{\text{н}}); & z_{\text{с}} &= \Phi(x_{\text{н}}, z_{\text{н}}); \\ t_{\text{с}} &= \Psi(t_{\text{н}}, x_{\text{н}}, z_{\text{н}}); & y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Так как в нашем случае компоненты метрического тензора (12.11) не зависят от координат явным образом, то условия форминвариантности метрики (12.11) при преобразованиях координат (14.2) в силу тензорного закона преобразования метрического тензора

$$g^{\text{н}}_{ik}(x_{\text{н}}) = \frac{\partial x^{l}_{\text{с}}}{\partial x^{i}_{\text{н}}} \frac{\partial x^{m}_{\text{с}}}{\partial x^{k}_{\text{н}}} g^{\text{с}}_{lm}(x_{\text{с}}(x_{\text{н}}))$$

примут вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= \Psi_t^2 g_{00}; \\ g_{01} &= c\Psi_t \Psi_x g_{00} + \Psi_t F_x g_{01}; \\ 0 &= c\Psi_t \Psi_z g_{00} + \Psi_t F_z g_{01}; \\ g_{11} &= c^2 \Psi_x^2 g_{00} + 2c\Psi_x F_x g_{01} + g_{11} F_x^2 - \Phi_x^2; \\ 0 &= c^2 \Psi_x \Psi_z g_{00} + c\,[\Psi_x F_z + \Psi_z F_x]\, g_{01} + g_{11} F_x F_z - \Phi_x \Phi_z; \\ -1 &= c^2 \Psi_z^2 g_{00} + 2c\Psi_z F_z g_{01} + g_{11} F_z^2 - \Phi_z^2, \end{aligned} \tag{14.3}$$

где введены обозначения

$$\Psi_t = \frac{\partial \Psi}{\partial t_{\text{н}}}; \quad \Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\text{н}}}; \quad \Psi_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z_{\text{н}}}; \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x_{\text{н}}};$$
$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z_{\text{н}}}; \quad \Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\text{н}}}; \quad \Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z_{\text{н}}}.$$

Тогда из первого уравнения системы (14.3) следует, что

$$\Psi = t_{\text{н}} + u(x_{\text{н}}, z_{\text{н}}).$$

Из второго и третьего уравнений имеем

$$\begin{aligned} u_z &= -F_z \frac{g_{01}}{c g_{00}}; \\ u_x &= \frac{g_{01}}{c g_{00}} [1 - F_x]. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Подставляя эти соотношения в четвертое и шестое уравнения, получим, что

$$\begin{aligned} \Phi_z &= \pm\sqrt{1-F_z^2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)}; \\ \Phi_x &= \pm\sqrt{(1-F_x^2)\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)}. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Тогда с учетом соотношений (14.4) и (14.5) оставшееся уравнение системы (14.3) приведем к виду

$$F_x^2-1+F_x^2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)=0. \tag{14.6}$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения будем искать методом Лагранжа—Шарпи.

Вводя обозначения $P_1=F_x$, $P_2=F_z$ и составляя характеристическую систему, соответствующую уравнению (14.6), получим

$$\frac{dx_н}{2P_1}=\frac{dz_н}{2P_2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)}=-\frac{dF}{2}=\frac{dP_1}{0}=\frac{dP_2}{0}.$$

Отсюда следует, что P_1 и P_2 являются константами:

$$F_x=P_1=\alpha=\mathrm{const};\quad F_z=P_2=\beta=\mathrm{const}. \tag{14.7}$$

Однако постоянные P_1 и P_2 не являются независимыми; подставляя соотношения (14.7) в уравнение (14.6), имеем

$$1-\alpha^2=\beta^2\left(\frac{g_{01}^2}{g_{00}}-g_{11}\right)=\beta^2\varkappa_{11}.$$

Это равенство будет выполнено, если предположить

$$\alpha=\pm\cos q;\quad \beta=\mp\frac{\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}}.$$

Тогда из соотношений (14.7) следует, что

$$F=\pm x_н\cos q\mp\frac{z_н\sin q}{\sqrt{\varkappa_1}}+x_0.$$

Поскольку инверсии знака координат и трехмерные трансляции нас не интересуют, то имеем

$$F=x_н\cos q-\frac{z_н\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}}. \tag{14.8}$$

Подставляя выражение (14.8) в уравнения (14.4) и (14.5) и решая их аналогичным способом, получим

$$\Phi = x_{\text{н}}\sqrt{\varkappa_{11}}\sin q + z_{\text{н}}\cos q;$$
$$u = x_{\text{н}}\frac{g_{01}}{cg_{00}}(1-\cos q) + z_{\text{н}}\frac{g_{01}\sin q}{cg_{00}\sqrt{\varkappa_{11}}}.$$

Таким образом, преобразования поворота вокруг оси y, оставляющие метрику (12.11) форминвариантной, имеют вид

$$\begin{aligned} t_{\text{с}} &= t_{\text{н}} + x_{\text{н}}\frac{g_{01}}{cg_{00}}(1-\cos q) + z_{\text{н}}\frac{g_{01}\sin q}{cg_{00}\sqrt{\varkappa_{11}}};\\ x_{\text{с}} &= x_{\text{н}}\cos q - z_{\text{н}}\frac{\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}};\\ z_{\text{с}} &= x_{\text{н}}\sqrt{\varkappa_{11}}\sin q + z_{\text{н}}\cos q;\\ y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Обратные преобразования определяются выражениями

$$\begin{aligned} t_{\text{н}} &= t_{\text{с}} + x_{\text{с}}\frac{g_{01}}{cg_{00}}(1-\cos q) - z_{\text{с}}\frac{g_{01}\sin q}{cg_{00}\sqrt{\varkappa_{11}}};\\ x_{\text{н}} &= x_{\text{с}}\cos q + z_{\text{с}}\frac{\sin q}{\sqrt{\varkappa_{11}}};\\ z_{\text{н}} &= -x_{\text{с}}\sqrt{\varkappa_{11}}\sin q + z_{\text{с}}\cos q;\\ y_{\text{н}} &= y_{\text{с}}. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Как видно из выражений (14.9) и (14.10), преобразование поворота системы координат вокруг оси y затрагивает и координатное время t, поскольку переменные t и x не являются в рассматриваемом нами случае ортогональными.

Таким образом, прямыми вычислениями мы убедились, что и в произвольных допустимых координатах псевдоевклидова пространства-времени существует десятипараметрическая группа преобразований, оставляющих метрику этого пространства-времени форминвариантной.

Это и не удивительно, поскольку наличие или отсутствие такой группы целиком диктуется структурой пространства-времени и ни в коей мере не зависит от выбора допустимых координат. В любой допустимой системе координат, при любом способе арифметизации точек пространство-время Минковского всегда остается плоским и тензор кривизны его, характеризующий внутренние свойства пространства-времени, при этом всегда равен нулю.

§ 15. Сложение координатных скоростей

Давайте теперь установим закон сложения координатных скоростей при преобразованиях (13.8). Пусть, например, в «старой» системе координат компоненты координатной скорости некоторого тела имеют вид $v_c^x = dx_c/dt_c$, $v_c^y = dy_c/dt_c$, $v_c^z = dz_c/dt_c$.

Найдем теперь компоненты координатной скорости этого тела в «новой» системе, движущейся относительно «старой» с координатной скоростью v. Для этого разделим дифференциалы координат $dx_н$, $dy_н$ и $dz_н$ на дифференциал $dt_н$. В результате получим

$$
\begin{aligned}
v_н^x &= \frac{dx_н}{dt_н} = \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right)v_c^x - v}{1+\frac{vv_c^x}{c_1c_2}}; \\
v_н^y &= \frac{dy_н}{dt_н} = \frac{v_c^y\sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}{1+\frac{vv_c^x}{c_1c_2}}; \qquad (15.1) \\
v_н^z &= \frac{dz_н}{dt_н} = \frac{v_c^z\sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}{1+\frac{vv_c^x}{c_1c_2}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, закон сложения координатных скоростей (15.1) при переходе между различными системами отсчета (13.8) существенно отличается от закона сложения скоростей при преобразованиях Лоренца, хотя при $c_1 = -c_2 = c$ и совпадает с ним. Отметим также, что скорости c_1 и c_2 являются предельными скоростями движения вдоль и против направления оси x соответственно. Действительно, исследуя первое из выражений (15.1) на экстремум при условии $c_1 > v > c_2$, можно убедиться, что $v_н^x$ достигает минимума при $v_c^x = c_2$ $(c_2 < 0)$ и максимума при $v_н^x = c_1$. Кроме того, интересно отметить, что подставляя в первую из формул (15.1) $v_c^x = c_1$, получим что и $v_{\text{н}}^x = c_1$. Если предположить $v_{\text{c}}^x = c_2$, то имеем $v_{\text{н}}^x = c_2$. Таким образом, в любой инерциальной системе (13.8) координатная скорость света в положительном направлении оси x равна c_1, а в противоположном направлении c_2, что и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь закон сложения физических скоростей при преобразованиях координат и времени (13.8). Будем обозначать физическую скорость большой буквой V, в отличие от координатной скорости v.

Как мы уже говорили, компоненты физической скорости определяются через отношение физических времени (10.12) и расстояний (10.13). Используя метрику (12.11), найдем, что в нашем случае

$$\varkappa_{11} = g_{00}\frac{c^2(c_2-c_1)^2}{4(c_1c_2)^2}; \qquad \varkappa_{22} = 1; \qquad \varkappa_{33} = 1;$$
$$g_{01} = -\frac{c}{2c_1c_2}(c_1+c_2)\,g_{00}. \tag{15.2}$$

Тогда выражение для компоненты V^x физической скорости

$$V^x = \frac{dl^x}{d\tau} = \frac{\sqrt{\varkappa_{11}}\,dx}{dt\sqrt{g_{00}} + \dfrac{g_{01}\,dx}{c\sqrt{g_{00}}}} = \frac{\sqrt{\varkappa_{11}}\,v^x}{\sqrt{g_{00}} + \dfrac{g_{01}v^x}{c\sqrt{g_{00}}}} \tag{15.3}$$

мы можем записать в виде

$$V^x = c\,\frac{(c_2-c_1)\,v^x}{2c_1c_2-(c_1+c_2)\,v^x}. \tag{15.4}$$

Разрешая это уравнение относительно компоненты v^x координатной скорости, получим

$$v^x = \frac{2c_1c_2V^x}{c(c_2-c_1)+(c_1+c_2)\,V^x}. \tag{15.5}$$

Совершенно аналогично из выражений

$$V^y = \frac{dl^y}{d\tau} = \frac{v^y}{\sqrt{g_{00}}\left[1-\dfrac{(c_1+c_2)}{2c_1c_2}v^x\right]};$$
$$V^z = \frac{dl^z}{d\tau} = \frac{v^z}{\sqrt{g_{00}}\left[1-\dfrac{(c_1+c_2)}{2c_1c_2}v^x\right]} \tag{15.6}$$

мы можем определить и остальные компоненты координатной скорости:

$$v^y=\frac{c(c_2-c_1)\sqrt{g_{00}}V^y}{[(c_1+c_2)V^x+c(c_2-c_1)]};\qquad v^z=\frac{c(c_2-c_1)\sqrt{g_{00}}V^z}{[(c_1+c_2)V^x+c(c_2-c_1)]}. \tag{15.7}$$

Пусть некоторое тело в «старой» системе отсчета имеет физическую скорость $\mathbf{V}_{(1)}$. Найдем физическую скорость $\mathbf{V}_{(2)}$ в «новой» системе отсчета, движущейся вдоль оси x со скоростью V относительно «старой».

Как следует из выражений (15.4) и (15.6), компоненты физической скорости $\mathbf{V}_{(2)}$ связаны с компонентами координатной скорости $\mathbf{v}_{(2)}$ зависимостью

$$V^x_{(2)}=\frac{c(c_2-c_1)v^x_{(2)}}{2c_1c_2-(c_1+c_2)v^x_{(2)}};\qquad V^y_{(2)}=\frac{v^y_{(2)}}{\sqrt{g_{00}}\left[1-\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}v^x_{(2)}\right]};\qquad V^z_{(2)}=\frac{v^z_{(2)}}{\sqrt{g_{00}}\left[1-\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}v^x_{(2)}\right]}. \tag{15.8}$$

Компоненты же координатной скорости $\mathbf{v}_{(2)}$ в «новой» системе отсчета связаны с компонентами $\mathbf{v}_{(1)}$ этой скорости в «старой» системе зависимостью (15.1). Подставляя выражения (15.1) в (15.8), учитывая связь (15.5) и (15.7) между компонентами координатной скорости $\mathbf{v}_{(1)}$ и физической скорости $\mathbf{V}_{(1)}$, а также вспоминая, что

$$v=-\frac{dx_н}{dt_н}=-\frac{2c_1c_2V}{[(c_1+c_2)V+c(c_2-c_1)]}, \tag{15.9}$$

получим формулы сложения физических скоростей:

$$V^x_{(2)}=\frac{V^x_{(1)}+V}{1+\frac{VV^x_{(1)}}{c^2}};\qquad V^y_{(2)}=\frac{V^y_{(1)}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{VV^x_{(1)}}{c^2}};\qquad V^z_{(2)}=\frac{V^z_{(1)}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{VV^x_{(1)}}{c^2}}. \tag{15.10}$$

Таким образом, в этом случае сложение физических скоростей такое же, как и в системе координат, где метрика диагональна. Следовательно, мы видим, что, хотя описание может быть произведено в произвольных координатах и оно несколько отличается от случая диагональной метрики, для физических величин мы всегда будем получать совпадающие с этим случаем выражения.

Далее, из выражения (15.4) следует, что физическая скорость света, распространяющегося в положительном направлении оси x ($v^x = c_1$, $v^y = v^z = 0$), по абсолютной величине равна физической скорости света, распространяющегося в противоположном направлении ($v^x = c_2$, $v^y = v^z = 0$), и совпадает с электродинамической постоянной c.

Отметим также, что, хотя координатные скорости тел могли быть любыми по величине (но не превышали, конечно, координатные скорости света c_1 и c_2), физические скорости никогда не могут быть больше c, т. е. $V < c$.

§ 16. Примеры обобщенных инерциальных систем отсчета

Рассмотрим несколько примеров обобщенных инерциальных систем отсчета. Для построения обобщенной инерциальной системы отсчета, как мы видели, следует совершить переход от галилеевых координат (T, X, Y, Z) к новым координатам (t, x, y, z), связанным с галилеевыми координатами соотношениями (12.2). Поскольку преобразование (12.2) линейно, то в общем случае оно описывает поворот осей x и t в плоскости XT, причем после поворота ось x может быть и не ортогональной оси t. Таким образом, повороты каждой из осей x и t в плоскости XT на произвольные, не обязательно равные, углы являются генераторами общего преобразования (12.2), поэтому уместно рассмотреть эти два преобразования раздельно.

1. Поворот оси x без изменения ориентации оси t описывается преобразованием Галилея

$$X = x - ut; \quad T = t. \tag{16.1}$$

Компоненты метрического тензора можно получить из выражения (12.4), если учесть, что в рассматриваемом случае $p=a=1$, $q=0$, $b=-u$. В результате имеем

$$g_{00}=1-\frac{u^2}{c^2}; \quad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1; \quad g_{01}=\frac{u}{c}. \tag{16.2}$$

Условие допустимости преобразования (16.1) в данном случае имеет вид

$$g_{00}=1-\frac{u^2}{c^2}>0.$$

Отсюда следует ограничение на значение параметра u, входящего в выражение (16.1):

$$u^2<c^2.$$

Используя выражения (16.2) для компонент метрического тензора, из соотношений (12.6) получим значения координатной скорости света вдоль оси x и в противоположном направлении

$$c_1=c+u; \quad c_2=-c+u.$$

Отсюда, полагая для определенности $u>0$, в силу условия $u^2<c^2$, получим

$$2c>c_1\geqslant c; \quad 0>c_2\geqslant -c.$$

Преобразования координат, оставляющие метрический тензор (16.2) форминвариантным и соответствующие переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой, в этом случае имеют вид

$$x_{\text{н}}=\frac{\left(1+\frac{uV}{c^2}\right)x_{\text{c}}+\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)Vt_{\text{c}}}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$t_{\text{н}}=\frac{\left(1-\frac{uV}{c^2}\right)t_{\text{c}}+\frac{Vx_{\text{c}}}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

где V — физическая относительная скорость рассматриваемых нами двух систем отсчета.

2. Поворот оси t без изменения ориентации оси x описывается преобразованием

$$X=x; \quad T=t+\frac{wx}{c^2}. \tag{16.3}$$

В этом случае для компонент метрического тензора имеем

$$g_{00}=1;\quad g_{01}=\frac{w}{c};\quad g_{11}=-\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right);\quad g_{22}=g_{33}=-1. \tag{16.4}$$

Условие допустимости преобразования (16.3) приводит к неравенству

$$w^2 < c^2.$$

Для скорости света вдоль оси x из соотношений (12.6) получим следующие выражения:

$$c_1=\frac{c^2}{c-w};\quad c_2=-\frac{c^2}{c+w}.$$

Если считать, что $w \geqslant 0$, то отсюда имеем

$$c \leqslant c_1 < \infty;\quad -\frac{c}{2} > c_2 \geqslant -c.$$

Преобразования координат, оставляющие метрический тензор (16.4) форминвариантным и соответствующие переходу между обобщенными инерциальными системами отсчета, в этом случае будут иметь вид

$$x_{\text{н}}=\frac{\left(1+\frac{Vw}{c^2}\right)x_{\text{c}}+Vt_{\text{c}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$t_{\text{н}}=\frac{\left(1-\frac{Vw}{c^2}\right)t_{\text{c}}+x_{\text{c}}\frac{V}{c^2}\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, в произвольной инерциальной системе отсчета постулат Эйнштейна о равенстве скорости света при распространении в прямом и обратном направлениях не выполняется, но тем не менее это обстоятельство никоим образом не сказывается на возможности описания физических процессов в этих системах отсчета.

§ 17. Синхронизация часов в различных точках пространства

Для приведения показаний часов, имеющих одинаковый темп хода и расположенных в различных точках пространства, в соответствие друг с другом обычно проводится процедура их синхронизации. Впервые процесс синхронизации часов с помощью световых сигналов был предложен в работе Пуанкаре [15] и впоследствии использовался в работе Эйнштейна [4].

Этот процесс состоит в следующем. Наблюдатель, находящийся в некоторой точке A в момент времени $t=t_1$ (по своим часам), посылает в другую точку B световой сигнал. Часы, находящиеся в точках A и B, будут синхронизованы, если часы в точке B запустить в ход в момент прихода светового сигнала, причем начальное показание этих часов t' должно учитывать время распространения t_{AB} светового сигнала из точки A в точку B: $t'=t_1+t_{AB}$. Однако часами, находящимися в точке A, измерить время распространения светового сигнала t_{AB} между точками A и B нельзя, поскольку начало процесса (посылка сигнала) и его окончание (прием сигнала) происходят в различных точках пространства.

С помощью часов мы можем измерить лишь время процесса, начало и окончание которого происходит в в одной и той же точке пространства, например суммарное время, необходимое для распространения светового сигнала от точки A до точки B и обратно

$$t_{ABA}=t_{AB}+t_{BA}=t_2-t_1,$$

где моменты $t=t_1$ посылки сигнала из точки A в точку B и его возвращения $t=t_2$ из точки B в точку A определяются по часам наблюдателя, находящегося в точке A.

Если предполагать, что скорость света в прямом и противоположном направлениях одинакова ($t_{AB}=t_{BA}$), то синхронизация часов в точках A и B будет обеспечена, если в момент прихода светового сигнала часы, находящиеся в точке B, показывают время

$$t'=t_1+\frac{1}{2}(t_2-t_1).$$

Если же не делать такого предположения, то показание t' часов в точке B в момент прихода светового сигнала должно определяться выражением

$$t'=t_1+\varepsilon_{AB}(t_2-t_1), \tag{17.1}$$

где ε_{AB} — параметр, характеризующий неравенство скоростей света в прямом и противоположном направлениях: $0<\varepsilon_{AB}<1$.

Эйнштейн [8, с. 542] в 1917 г. допускал, что выбор значения $\varepsilon = 1/2$ при синхронизации часов не является обязательным, однако другого выбора значения ε в своих работах он не делал.

Впоследствии Рейхенбах (см., например, [10]) в 1928 г. вернулся к этому вопросу и изучил возможность синхронизации часов при $\varepsilon \neq 1/2$. Поскольку величина скорости света в прямом и противоположном направлениях при подходе Эйнштейна—Рейхенбаха ничем не предопределялась, то Рейхенбах пришел к выводу, что выбор величины $0 < \varepsilon < 1$ также ничем не предопределяется, а является предметом соглашения (конвенции). Отсюда следовало, что и такие понятия механики, как одновременность, да и сама механика, носят условный конвенциональный характер.

Однако эти выводы неправильны. Как мы видели, величина координатной скорости светового сигнала в различных направлениях не является предметом соглашения, а целиком предопределяется выбором системы координат, т. е. метрикой пространства-времени. Поэтому и выбор значения ε в выражении (17.1) будет целиком предопределяться метрикой. Учет же метрики позволяет построить физические величины, отражающие свойства пространства-времени.

Действительно, рассмотрим, например, синхронизацию часов, расположенных вдоль оси x в случае произвольной инерциальной системы отсчета, метрика которой задана выражением (12.3). Не ограничивая общности, будем считать, что $x_A < x_B$; тогда распространение света из точки A в точку B будет происходить со скоростью

$$c_1 = c\,\frac{g_{01} + \sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{-g_{11}} > 0, \tag{17.2}$$

а в обратном направлении—со скоростью

$$c_2 = c\,\frac{g_{01} - \sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{-g_{11}} < 0. \tag{17.3}$$

Пусть наблюдатель в момент времени t_1 послал из точки A в точку B световой сигнал, который отразился в ней и вернулся в точку A в момент времени t_2. Схематически мировые линии этих точек и светового сигнала изображены на рис. 3.

При движении сигнала из точки A в точку B он имел скорость $dx/dt = c_1$. Поскольку $c_1 = \text{const}$, мы можем

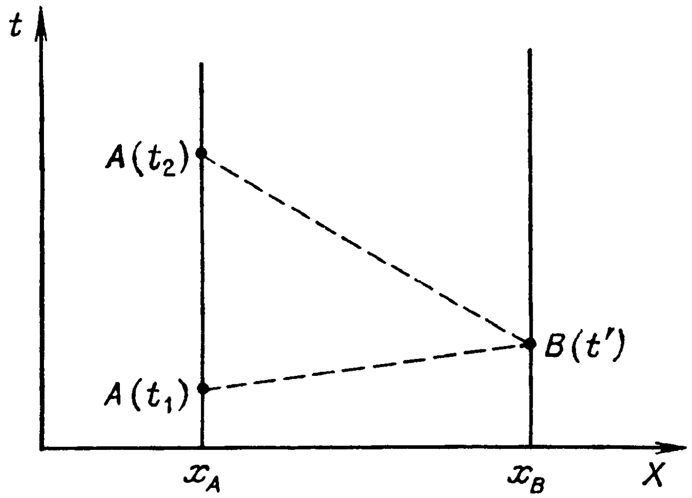

Рис. 3. Мировые линии наблюдателей и светового сигнала при синхронизации часов

перейти в этом выражении от дифференциалов к конечным приращениям

$$l_{AB} = c_1 t_{AB},$$

где l_{AB} — путь, пройденный сигналом при его движении из точки A в точку B.

Поскольку $l_{AB} = l_{BA} = x_B - x_A$, то из этих выражений получим

$$t_{AB} = -\frac{c_2}{c_1} t_{BA}. \tag{17.4}$$

Полное время, затрачиваемое световым сигналом на путь ABA, равно

$$t_{ABA} = t_2 - t_1 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{c_2 - c_1}{c_2} t_{AB} = \frac{c_1 - c_2}{c_1} t_{BA}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} t_{AB} &= \frac{c_2}{c_2 - c_1}(t_2 - t_1); \\ t_{BA} &= \frac{c_1}{c_1 - c_2}(t_2 - t_1). \end{aligned} \tag{17.5}$$

По определению, находящиеся в точках A и B часы будут синхронизованы, если в момент прихода светового сигнала в точку B находящиеся там часы показывают время

$$t'=t_1+t_{AB}=t_1+\varepsilon_{AB}(t_2-t_1).$$

Подставляя в это соотношение первое из выражений (17.5), определим величину ε_{AB}:

$$\varepsilon_{AB}=\frac{c_2}{c_2-c_1}. \tag{17.6}$$

Совершенно аналогично можно получить

$$\varepsilon_{BA}=\frac{c_1}{c_1-c_2}.$$

Легко также убедиться в том, что в случае равенства скоростей света в противоположных направлениях, т. е. при $c_1=-c_2$, мы имеем

$$\varepsilon_{AB}=\varepsilon_{BA}=\frac{1}{2}.$$

Определим теперь величину ε для рассмотренных в § 16 частных случаев выбора инерциальных систем отсчета.

В случае метрики (16.2) выражения (17.2) и (17.3) дают

$$c_1=c+u;\quad c_2=-c+u.$$

Поэтому из соотношения (17.6) получим

$$\varepsilon_{AB}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{c}\right). \tag{17.7}$$

В случае метрики (16.4) из выражений (17.2) и (17.3) имеем

$$c_1=\frac{c^2}{c-w};\quad c_2=-\frac{c^2}{c+w}.$$

Тогда соотношение (17.6) дает

$$\varepsilon_{AB}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{w}{c}\right). \tag{17.8}$$

Из выражений (17.7) и (17.8) следует, что параметр ε_{AB} при синхронизации часов в рассмотренных выше двух совершенно различных инерциальных системах отсчета совпадает с точностью до обозначений.

Рассмотрим теперь синхронизацию часов, расположенных вдоль некоторого направления, не совпадающего с направлением оси x, в случае произвольной инерциальной системы отсчета (см. рис. 4). Для определенности будем считать, что точки A и B лежат в плоскости xy.

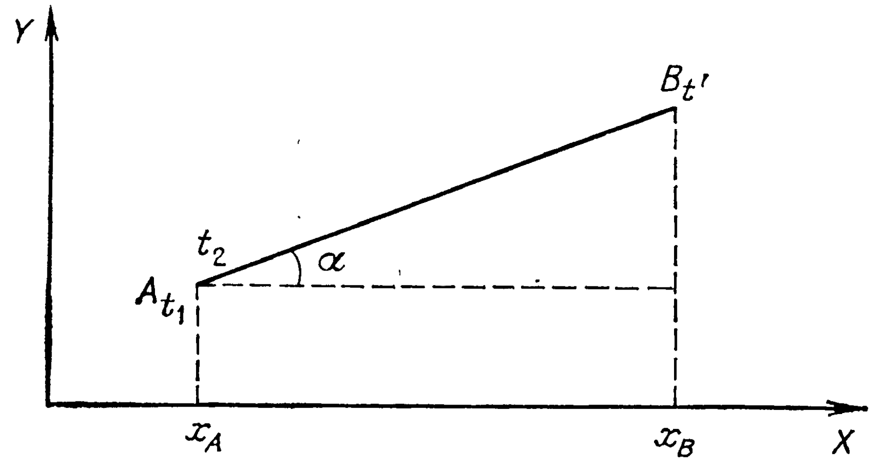

Рис. 4. Синхронизация часов вдоль произвольного направления

Обозначим тангенс угла наклона прямой AB к оси x через k:

$$\frac{dy}{dx}=k; \quad |k|<\infty.$$

Тогда выражение для интервала (12.3) в случае светового сигнала, распространяющегося вдоль направления AB, принимает вид

$$ds^2=c^2g_{00}\,dt^2+2cg_{01}\,dx\,dt+(g_{11}-k^2)\,dx^2=0.$$

Отсюда можно найти проекции скорости света на ось x:

$$\begin{aligned} v_{1x}&=c\,\frac{g_{01}+\sqrt{g_{01}^2+(k^2-g_{11})\,g_{00}}}{k^2-g_{11}}>0;\\ v_{2x}&=c\,\frac{g_{01}-\sqrt{g_{01}^2+(k^2-g_{11})\,g_{00}}}{k^2-g_{11}}<0. \end{aligned} \qquad (17.9)$$

Рассуждая аналогично рассмотренному выше случаю синхронизации часов, расположенных вдоль оси x, получим

$$\Delta x_{AB}=x_B-x_A=v_{1x}t_{AB}=-v_{2x}t_{BA}.$$

Отсюда следует, что

$$t_{AB}=-\frac{v_{2x}}{v_{1x}}\,t_{BA}.$$

Полный промежуток времени, необходимый для распространения светового сигнала из точки A в точку B и обратно, будет равен

$$t_{ABA} = t_2 - t_1 = t_{AB} + t_{BA} = t_{AB}\left(1 - \frac{v_{1x}}{v_{2x}}\right).$$

Из этого соотношения мы можем выразить величину промежутка времени t_{AB} через полный промежуток времени:

$$t_{AB} = \frac{v_{2x}}{v_{2x} - v_{1x}}(t_2 - t_1).$$

Используя определение

$$t' = t_1 + t_{AB} = t_1 + \varepsilon_{AB}(t_2 - t_1),$$

найдем выражение для параметра ε в рассматриваемом случае:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{v_{2x}}{v_{2x} - v_{1x}}. \tag{17.10}$$

Таким образом, выбор того или иного значения при синхронизации часов в разных точках пространства не является предметом соглашения или каким-либо принципом теории относительности, а является частным проявлением конкретного выбора координатной системы.

Однако описание физических явлений можно производить и в любых других допустимых координатах. Необходимо только помнить, что в этом случае координатная скорость света, выбор величины ε при синхронизации, а также связь координатных величин с физическими величинами целиком предопределяются выбором системы координат и, как следствие этого, метрическим тензором пространства-времени.

Эйнштейн же при формулировке теории относительности не проанализировал этой связи, а шел неоднозначным путем синхронизации, предложенным ранее Пуанкаре. В результате этого постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света в его формулировке, как мы теперь знаем, отражал лишь частный выбор координатных систем, поскольку он основывался (как мы видели) на понятии координатной скорости света. В тот период он не осознал, что определить скорость света как физическую скорость можно лишь тогда, когда дано определение длины и времени. Выше мы видели, что в определение времени и длины обязательно входят компоненты метрического тензора и координатные переменные (см. формулы (4.12) и (4.13)). Эйнштейн, как он отмечает в работе [16], понял это лишь в 1912 г. Галилеевы координатные величины совпадают или простейшим образом связаны с физическими величинами $d\tau$ и dl^2:

$$d\tau = dT; \; dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

§ 18. Обобщенный принцип относительности

Как мы уже знаем, Пуанкаре и Минковский открыли, что пространство-время, в котором протекают все физические процессы, едино и геометрия его псевдоевклидова. Однако в результате этого открытия принцип относительности утратил свою фундаментальную роль и превратился в частное следствие того, что все физические процессы протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова. Метрика этого пространства-времени остается форминвариантной при преобразованиях, описывающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, что и обеспечивало эквивалентность инерциальных систем отсчета для описания всех физических явлений. Таким образом, фундаментальную роль стала играть геометрия пространства-времени.

Теперь же я хочу показать, что утверждение о том, что все физические процессы происходят в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова, гораздо богаче содержания принципа относительности, поскольку это утверждение позволяет сформулировать обобщенный принцип относительности, справедливый не только в инерциальных, но и в неинерциальных системах отсчета. В этой связи необходимо отметить, что в литературе довольно часто можно встретить утверждения о том, что специальной теории относительности принадлежит только описание явлений в инерциальных системах отсчета, в то время как описание явлений в неинерциальных системах отсчета является прерогативой общей теории относительности.

Эти утверждения неправильны. Из фундаментального открытия Пуанкаре и Минковского, что геометрия пространства-времени, в которой происходят все физические процессы, является псевдоевклидовой, следует, что для описания физических явлений мы можем пользоваться любым классом допустимых систем отсчета: как инерциальных, так и неинерциальных. Тензор кривизны этого пространства-времени, определяющий всю его внутреннюю геометрию, остается равным нулю как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета. Поэтому в рамках специальной теории относительности полностью возможно описание физических явлений и в неинерциальных системах отсчета.

Поскольку геометрия пространства-времени при переходе между различными системами отсчета не изменяется и остается псевдоевклидовой, то для любой системы отсчета, как инерциальной, так и неинерциальной, существует десятипараметрическая группа преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным. Таким образом, в псевдоевклидовом пространстве-времени для любой системы отсчета мы можем указать бесконечную совокупность других систем отсчета, преобразования между которыми оставляют метрику форминвариантной.

Это означает, что в псевдоевклидовом пространстве-времени справедлив обобщенный принцип относительности, который я сформулирую следующим образом: какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета; так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить на эксперименте, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся. Таким образом, определяя для произвольной допустимой системы отсчета преобразования координат, оставляющих метрику форминвариантной, мы тем самым находим всю бесконечную совокупность систем отсчета, физически эквивалентных с исходной системой.

Следует особо подчеркнуть, что любой физический процесс позволяет определить, находимся мы в инерциальной или неинерциальной системе отсчета. Однако никакой физический эксперимент не в силах дать ответ на вопрос: а в какой именно системе из бесконечного набора систем отсчета, имеющих форминвариантную метрику, мы находимся? Открытие псевдоевклидовой геометрии пространства-времени позволило нам сформулировать физические законы как в инерциальных, так и в неинерциальных системах огсчета и этим самым опровергнуть ошибочное утверждение о неприменимости специальной теории относительности к ускоренным системам отсчета.

Покажем на примере релятивистски равноускоренной системы отсчета, каким образом можно найти все совокупности систем отсчета, метрика которых форминвариантна метрике исходной системы отсчета.

§ 19. Релятивистски равноускоренное движение

Для построения релятивисгски равноускоренной системы отсчета нам необходимо прежде всего выяснить, какое движение следует называть релятивистски равноускоренным.

Как известно, в классической механике равноускоренным движением материальной точки называется движение под действием постоянной по величине и направлению силы

$$f^{\alpha} = \text{const}. \qquad (19.1)$$

Перенося это определение на релятивистский случай, естественно называть релятивистски равноускоренным движением такое движение, которое происходит под действием постоянной по величине и направлению силы (19.1), но удовлетворяет уже уравнениям релятивистской механики:

$$m_0 c \frac{du^i}{ds} = F^i, \qquad (19.2)$$

где $u^i = dx^i/ds$ — 4-вектор скорости частицы

$$u^i = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{v^{\alpha}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]; \qquad (19.3)$$

F^i — 4-вектор силы

$$F^i = \left[\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{f^{\alpha}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]; \qquad (19.4)$$

f^{α} — обычная трехмерная сила.

Интервал для движущейся частицы в галилеевых координатах, как обычно, имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{19.5}$$

Учитывая, что для частицы, движущейся по закону

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

дифференциалы dx, dy и dz не являются независимыми, а связаны с дифференциалом dt соотношениями

$$dx = v^x dt; \quad dy = v^y dt; \quad dz = v^z dt,$$

интервал (19.5) приведем к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{19.6}$$

Отметим, что величина $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ называется собственным временем движущейся частицы.

Уравнения движения (19.2) с учетом выражений (19.3), (19.4) и (19.6) принимают вид

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= \frac{\mathbf{f}\mathbf{v}}{c^2}; \\ m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{19.7}$$

Эти уравнения впервые написал Пуанкаре [3], хотя обычно считают, что это сделал Планк [17]. Легко убедиться, что для малых скоростей ($v/c \ll 1$) уравнения (19.7) переходят в обычные уравнения Ньютона:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^2}{2} = \mathbf{f}\mathbf{v}; \quad m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}.$$

Покажем теперь, что первое из уравнений (19.7) является следствием остальных и может быть опущено. Для этого запишем трехмерные уравнения движения (19.7) в виде

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \mathbf{f}. \tag{19.8}$$

Умножая уравнение (19.8) скалярно на $\mathbf{v}/c^2$, получим

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)=\frac{\mathbf{v}}{c^2}\,\mathbf{f}. \tag{19.9}$$

Преобразуя левую часть этого уравнения, приходим к первому уравнению системы (19.7)

$$m_0\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)=\mathbf{f}\,\frac{\mathbf{v}}{c^2}.$$

Отметим также, что в силу уравнения (19.9) релятивистские уравнения движения (19.8) мы можем записать в квазиклассическом виде:

$$m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left[\mathbf{f}-\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{f})\right]\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Таким образом, релятивистски равноускоренное движение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\mathbf{f}}{m_0}=\mathbf{w}=\mathrm{const}. \tag{19.10}$$

Найдем, по какому закону изменяются с течением времени координаты материальной точки, движущейся релятивистски равноускоренно. Интегрируя уравнение (19.10) по времени, получим

$$\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0;\quad \mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{v}(0)}{\sqrt{1-v^2(0)/c^2}}. \tag{19.11}$$

Разделим это равенство на c, возведем обе части его в квадрат и прибавим к его правой и левой частям по единице. В результате получим

$$\frac{1}{1-v^2/c^2}=1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}. \tag{19.12}$$

Тогда из выражений (19.11) и (19.12) имеем

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0}{\sqrt{1+\dfrac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим закон релятивистски равноускоренного движения:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\frac{\mathbf{w}c^2}{w^2}\left[\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}-1\right]+$$

$$+\frac{c}{w}\left(\mathbf{v}_0-\mathbf{w}\,\frac{(\mathbf{v}_0\mathbf{w})}{w^2}\right)\ln\left[\frac{wt}{c}+\frac{\mathbf{v}_0\mathbf{w}}{cw}+\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}\right]. \tag{19.13}$$

Собственное время частицы будет изменяться при этом по закону

$$\tau=t_0+\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wt}{c}+\frac{\mathbf{v}_0\mathbf{w}}{cw}+\sqrt{1+\frac{(\mathbf{w}t+\mathbf{v}_0)^2}{c^2}}\right]^2. \tag{19.14}$$

§ 20. Группа релятивистски равноускоренных систем отсчета

Пусть инерциальная и релятивистски равноускоренная система отсчета имеют одинаковую ориентацию осей координат, и релятивистски равноускоренная система движется без начальной скорости ($\mathbf{v}_0=0$) вдоль оси x инерциальной системы отсчета. Тогда, если считать, что при $t=0$ их начала координат совпадали, из выражения (19.13) получим закон движения начала координат релятивистски равноускоренной системы отсчета:

$$x_0=\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-1\right].$$

Поэтому формулы преобразования координат при переходе от инерциальной системы отсчета $(X,\ T)$ к релятивистски равноускоренной системе $(x,\ t)$ будут иметь вид

$$x=X-x_0=X-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}-1\right].$$

Преобразование времени можно задать произвольно. Рассмотрим последовательно два наиболее интересных случая:

а) когда время остается одним и тем же в обеих системах отсчета:

$$t=T;$$

б) когда в качестве времени выбирается собственное время какой-либо точки (например, начала координат) ускоренной системы отсчета:

$$t=\frac{c}{w}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{wT}{c}=\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wT}{c}+\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}\right].$$

Для первого случая имеем

$$x=X-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2T^2}{c^2}}-1\right];\quad t=T. \tag{20.1}$$

Отметим, что при отсутствии ускорения ($w=0$) данное преобразование превращается в тождественное преобразование

$$x=X,\quad t=T.$$

При преобразовании (20.1) метрика псевдоевклидова пространства-времени принимает вид

$$ds^2=\frac{c^2\,dt^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-\frac{2wt\,dt\,dx}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{20.2}$$

Изучим, какие преобразования координат оставляют метрику (20.2) форминвариантной. Как известно, в псевдоевклидовом пространстве-времени существует десятипараметрическая группа бесконечно малых движений, оставляющих метрику этого пространства-времени форминвариантной. Наличие десяти векторов Киллинга гарантирует нам существование десяти законов сохранения в любой системе отсчета псевдоевклидова пространства-времени.

Однако в данном случае нам необходимо провести анализ группы конечных преобразований координат, оставляющих метрику (20.2) форминвариантной, а не бесконечно малых движений, характеризуемых векторами Киллинга.

Легко убедиться, что преобразования трансляции пространственных координат

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+a^{\alpha}$$

на постоянный вектор a^{α} оставляют метрику (20.2) форминвариантной.

Действительно, поскольку метрический тензор γ_{ni} не зависит от пространственных координат, а множители

$\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\beta}$ образуют трехмерный символ Кронекера

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$

то из тензорного закона преобразования компонент метрического тензора

$$\gamma'^{np}(x') = \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{m}} \gamma^{lm}(x(x'))$$

следует, что условие форминвариантности метрики выполняется:

$$\gamma'^{np}(x') = \gamma^{np}(x').$$

Легко также убедиться в том, что метрика (20.2) форминвариантна и при преобразовании поворота вокруг оси x:

$$y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha;$$
$$z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha.$$

Рассмотрим теперь преобразования координат, соответствующие переходу между различными неинерциальными системами отсчета и оставляющие метрику (20.2) форминвариантной. Для простоты сначала рассмотрим случай, соответствующий относительному движению неинерциальных систем отсчета вдоль оси x.

В силу симметрии задачи искомые преобразования координат запишем в виде

$$\begin{aligned} t_{\text{с}} &= \Psi(t_{\text{н}}, x_{\text{н}}); \\ x_{\text{с}} &= cf(t_{\text{н}}, x_{\text{н}}); \\ y_{\text{с}} &= y_{\text{н}}, \quad z_{\text{с}} = z_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{20.3}$$

При преобразовании координат метрический тензор пространства-времени преобразуется по закону

$$\gamma^{\text{н}}_{ik}(x_{\text{н}}) = \frac{\partial x^{l}_{\text{с}}}{\partial x^{i}_{\text{н}}} \frac{\partial x^{m}_{\text{с}}}{\partial x^{k}_{\text{н}}} \gamma^{\text{с}}_{ml}(x_{\text{с}}(x_{\text{н}})), \tag{20.4}$$

где $\gamma^{\text{н}}_{ik}(x_{\text{н}})$ и $\gamma^{\text{с}}_{ml}(x_{\text{с}})$ означают соответственно новую и старую функциональные формы метрического тензора. Условие форминвариантности метрики требует того, чтобы функциональная форма метрического тензора при преобразованиях координат не менялась:

$$\gamma_{ik}^{\text{н}}(x_{\text{н}}) = \gamma_{ik}^{\text{с}}(x_{\text{н}}). \qquad (20.5)$$

В рассматриваемом случае условие (20.5) требует, чтобы метрический тензор имел вид

$$\begin{gathered}
\gamma_{00}^{\text{н}} = \frac{1}{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}; \quad \gamma_{01}^{\text{н}} = -\frac{w t_{\text{н}}}{c\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}}; \\
\gamma_{00}^{\text{с}} = \frac{1}{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}}; \quad \gamma_{01}^{\text{с}} = -\frac{w\Psi}{c\sqrt{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}}}; \\
\gamma_{11}^{\text{с}} = \gamma_{11}^{\text{н}} = -1; \quad \gamma_{22}^{\text{н}} = \gamma_{22}^{\text{с}} = -1; \\
\gamma_{33}^{\text{н}} = \gamma_{33}^{\text{с}} = -1.
\end{gathered} \qquad (20.6)$$

В силу тензорного характера преобразований метрического тензора (20.4) условие форминвариантности (20.5) при преобразовании (20.3) можно записать в другом виде:

$$\begin{gathered}
\gamma_{00}^{\text{н}} = \Psi_t^2 \gamma_{00}^{\text{с}} + 2\Psi_t f_t \gamma_{01}^{\text{с}} - f_t^2; \\
\gamma_{01}^{\text{н}} = c\Psi_t \Psi_x \gamma_{00}^{\text{с}} + c\gamma_{01}^{\text{с}}\left[\Psi_t f_x + \Psi_x f_t\right] - c f_t f_x; \\
-1 = \Psi_x^2 \gamma_{00}^{\text{с}} c^2 + 2\Psi_x f_x \gamma_{01}^{\text{с}} c^2 - f_x^2 c^2,
\end{gathered} \qquad (20.7)$$

где введены обозначения

$$\Psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t}; \quad \Psi_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x}; \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Из первого и последнего уравнений системы нелинейных уравнений в частных производных (20.7) имеем

$$\begin{gathered}
f_t = \Psi_t \gamma_{01}^{\text{с}} + a\sqrt{\Psi_t^2\left[(\gamma_{01}^{\text{с}})^2 + \gamma_{00}^{\text{с}}\right] - \gamma_{00}^{\text{н}}}; \\
f_x = \Psi_x \gamma_{01}^{\text{с}} + b\sqrt{\Psi_x^2\left[(\gamma_{01}^{\text{с}})^2 + \gamma_{00}^{\text{с}}\right] + \frac{1}{c^2}},
\end{gathered} \qquad (20.8)$$

где a и b являются знаковыми функциями:

$$a = \pm 1; \quad b = \pm 1.$$

Подставляя соотношения (20.8) во второе уравнение системы (20.7), получим

$$\left[\Psi_t^2 + 2c\gamma_{01}^{\text{н}}\Psi_t\Psi_x - \gamma_{00}^{\text{н}} c^2 \Psi_x^2\right]\left[(\gamma_{01}^{\text{с}})^2 + \gamma_{00}^{\text{с}}\right] - \gamma_{00}^{\text{н}} - (\gamma_{01}^{\text{н}})^2 = 0. \qquad (20.9)$$

Учитывая выражения (20.6), уравнение (20.9) запишем в виде

$$\Psi_t^2 - \frac{c^2\Psi_x^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} - \frac{2wt\Psi_t\Psi_x}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}} - 1 = 0. \qquad (20.10)$$

Таким образом, систему нелинейных уравнений (20.7) мы свели к одному нелинейному уравнению в частных производных (20.10), решив которое, легко получить и решения уравнений (20.8).

Согласно общей теории нелинейных уравнений в частных производных первого порядка (метод Лагранжа — Шарпи), уравнение (20.10) имеет следующую характеристическую систему ($P_1 = \Psi_t$, $P_2 = \Psi_x$):

$$\frac{dt}{2\left[P_1 - \frac{wtP_2}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right]} = -\frac{dx}{2\left[\frac{P_2c^2}{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} + \frac{wtP_1}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right]} =$$

$$= \frac{d\Psi}{2} = \frac{dP_1}{\frac{2wP_2}{\left[1+\frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{3/2}}\left[P_1 - \frac{wtP_2}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right]} = \frac{dP_2}{0}. \qquad (20.11)$$

Комбинируя последний член с первыми двумя, получим

$$P_2 = \frac{\Phi_0}{c}; \quad \Phi_0 = \mathrm{const}. \qquad (20.12)$$

Разделив предпоследний член характеристической системы (20.11) на первый и учитывая выражение (20.12), приходим к уравнению

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{w\Phi_0}{c}\left[1 + \frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{-3/2}.$$

Интегрируя это обыкновенное дифференциальное уравнение, имеем

$$P_1 = \Phi_1 + \frac{\Phi_0 wt}{c\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}; \quad \Phi_1 = \mathrm{const}. \qquad (20.13)$$

Таким образом, из соотношений (20.12) и (20.13) следует, что

$$\Psi_t = \Phi_1 + \frac{\Phi_0 wt}{c\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}; \quad \Psi_x = \frac{\Phi_0}{c}. \tag{20.14}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (20.10), найдем соотношение между постоянными Φ_0 и Φ_1

$$\Phi_1^2 = 1 + \Phi_0^2. \tag{20.15}$$

Интегрируя систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (20.14), получим

$$\Psi = \frac{\Phi_0}{c}x + \Phi_1 t + \frac{c}{w}\Phi_0\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} + \tilde{\Psi}_0; \qquad \tilde{\Psi}_0 = \mathrm{const}. \tag{20.16}$$

Подставляя выражения (20.14) в уравнения (20.8), имеем

$$f_t = -\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}} + a\left[\Phi_0 + \frac{\Phi_1 wt}{c\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}\right];$$

$$f_x = -\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+\frac{w^2\Psi^2}{c^2}} + \frac{b\Phi_1}{c}.$$

Интегрируя эту систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных, найдем функцию f:

$$f = -\frac{c}{\omega}\sqrt{1+\frac{\omega^2\Psi^2}{c^2}} + b\Phi_1\frac{x}{c} + a\Phi_0 t + \frac{c}{w}\Phi_1\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} + \tilde{f}_0.$$

Таким образом, преобразования координат, оставляющие метрику (20.2) форминвариантной, имеют вид

$$t_c = \frac{\Phi_0}{c}x_н + \Phi_1 t_н + \frac{c}{w}\Phi_0\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}} + \tilde{\Psi}_0;$$

$$x_c = b\Phi_1 x_н + ca\Phi_0 t_н + \frac{c^2\Phi_1}{w}\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}} - \tag{20.17}$$

$$-\frac{c^2}{w}\sqrt{1+\frac{w^2}{c^2}\left[\frac{\Phi_0}{c}x_н + \Phi_1 t_н + \frac{c}{w}\Phi_0\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}} + \tilde{\Psi}_0\right]^2} + \tilde{f}_0 c.$$

Чтобы эти преобразования имели смысл и при $w=0$, необходимо переопределить постоянные интегрирования

$$\tilde{\Psi}_0=\Psi_0-\frac{c}{w}\Phi_0; \quad \tilde{f}_0=\frac{1}{c} f_0-\frac{c}{w}\Phi_1+\frac{c}{w}.$$

Тогда получим

$$t_{\text{с}}=\frac{\Phi_0}{c}x_{\text{н}}+\Phi_1 t_{\text{н}}+\frac{c}{w}\Phi_0\left[\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}-1\right]+\Psi_0;$$

$$x_{\text{с}}=b\Phi_1 x_{\text{н}}+ca\Phi_0 t_{\text{н}}+\frac{c^2}{w}\Phi_1\left[\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}-1\right]-$$

$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2}\left[\frac{\Phi_0}{c}x_{\text{н}}+\Phi_1 t_{\text{н}}+\frac{c}{w}\Phi_0\left(\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}-1\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\Psi_0\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]+f_0, \qquad (20.18)$$

где $\Phi_1^2=1+\Phi_0^2$. Эти преобразования содержат три произвольных параметра Φ_0, Ψ_0, f_0 (параметр w в выражениях (20.18) задается метрикой пространства-времени (20.2) и не является поэтому произвольным параметром преобразования) и две знаковые функции $a=\pm 1$, $b=\pm 1$. Вполне очевидно, что знаковые функции описывают операции инверсии координат x и t. Ввиду того, что нас в дальнейшем будет интересовать лишь собственная группа без инверсии, то положим $a=b=1$.

Таким образом, преобразования (20.18) составляют трехпараметрическую группу преобразований координат, оставляющих метрику (20.2) форминвариантной. Выясним смысл параметров группы. Параметр f_0 описывает уже рассмотренную нами трансляцию координаты x. Легко убедиться, что параметр Ψ_0 описывает преобразование трансляции времени.

Действительно, положив $\Phi_1=1$, $\Phi_0=0$, получим

$$t_{\text{с}}=t_{\text{н}}+\Psi_0;$$

$$x_{\text{с}}=x_{\text{н}}+\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2 t_{\text{н}}^2}{c^2}}-1\right]-$$

$$-\frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2(t_{\text{н}}+\Psi_0)^2}{c^2}}-1\right]+f_0.$$

Таким образом, в отличие от группы Пуанкаре, в релятивистски равноускоренной системе отсчета трансляция по времени требует изменения и координат для обеспечения форминвариантности.

Параметр Φ_0 описывает движение одной неинерциальной системы отсчета относительно другой. И чтобы получить выражение для этого параметра через физическую скорость V движения одной неинерциальной системы отсчета относительно другой, воспользуемся следующим обстоятельством: в бесконечно малой окрестности начального момента времени обеих систем отсчета, т. е. при выполнении условий

$$\frac{w^2 t_c^2}{c^2}=\frac{w^2}{c^2}\left[\frac{\Phi_0}{c}x_н+\Phi_1 t_н+\frac{c}{w}\Phi_0\left(\sqrt{1+\frac{w^2 t_н^2}{c^2}}-1\right)\right]^2\ll 1; \tag{20.19}$$

$$\frac{w^2 t_н^2}{c^2}\ll 1;\quad \Psi_0=f_0=0$$

преобразования (20.18) должны являться преобразованиями Лоренца между мгновенно сопутствующими инерциальными системами отсчета.

Учитывая оценки (20.19) из выражения (20.18), в этом случае получим

$$t_c=\frac{\Phi_0}{c}x_н+\Phi_1 t_н;\quad x_c=\Phi_1 x_н+c\Phi_0 t_н.$$

Отсюда имеем

$$\Phi_0=\frac{V}{c\sqrt{1-V^2/c^2}};\quad \Phi_1=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

что находится в полном согласии с соотношением (20.15).

Таким образом, преобразования координат, оставляющие метрику (20.2) форминвариантной и описывающие переход между релятивистски равноускоренными системами отсчета, имеют вид

$$t_c=\frac{t_н+\dfrac{Vx_н}{c^2}+\dfrac{V}{w}\left(\sqrt{1+\dfrac{w^2t_н^2}{c^2}}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+\Psi_0;$$

$$x_c=\frac{x_н+Vt_н+\dfrac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\dfrac{w^2t_н^2}{c^2}}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-$$

$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2-V^2}\left[t_н+\frac{Vx_н}{c^2}+\frac{V}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t_н^2}{c^2}}-1\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\Psi_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]+f_0. \tag{20.20}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$t_{\text{н}} = \frac{t_{\text{c}} - \frac{Vx_{\text{c}}}{c^2} - \frac{V}{w}\left(\sqrt{1 + \frac{w^2 t_{\text{c}}^2}{c^2}} - 1\right) - \Psi_0 + \frac{Vf_0}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};$$

$$x_{\text{н}} = \frac{x_{\text{c}} - Vt_{\text{c}} + \frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1 + \frac{w^2 t_{\text{c}}^2}{c^2}} - 1\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} -$$

$$- \frac{c^2}{w}\left[\left\{1 + \frac{w^2}{c^2 - V^2}\left[t_{\text{c}} - \frac{Vx_{\text{c}}}{c^2} - \frac{V}{w}\left(\sqrt{1 + \frac{w^2 t_{\text{c}}^2}{c^2}} - 1\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \Psi_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2} - 1\right] - \frac{f_0 - V\Psi_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{20.21}$$

Таким образом, в данном случае при $\Psi_0 = 0$; $f_0 = 0$, как и в случае преобразований Лоренца, выражения для прямого и обратного преобразований могут быть получены друг из друга изменением знака относительной скорости $V \to -V$ и заменой $t_{\text{н}} \leftrightarrow t_{\text{c}}$, $x_{\text{н}} \leftrightarrow x_{\text{c}}$.

Для второго случая формулы преобразования от инерциальной к релятивистски равноускоренной системе отсчета имеют вид

$$x = X - \frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1 + \frac{w^2 T^2}{c^2}} - 1\right];$$

$$t = \frac{c}{w} \operatorname{Ar\,sh} \frac{wT}{c}. \tag{20.22}$$

Метрика в релятивистски равноускоренной системе отсчета, определенной преобразованиями (20.22), имеет вид

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - 2\operatorname{sh}\frac{wt}{c}\,dx\,c\,dt - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{20.23}$$

Найдем преобразования координат вида (20.3), оставляющие метрику (20.23) форминвариантной. В рассматриваемом случае ненулевые компоненты метрического тензора пространства-времени в старой и новой координатных системах должны иметь вид

$$\gamma_{01}^{\text{н}} = -\operatorname{sh}\frac{wt}{c}; \quad \gamma_{01}^{\text{c}} = -\operatorname{sh}\frac{w\Psi}{c}; \quad \gamma_{11}^{\text{н}} = \gamma_{22}^{\text{н}} = \gamma_{33}^{\text{н}} = -1;$$

$$\gamma_{11}^{\text{c}} = \gamma_{22}^{\text{c}} = \gamma_{33}^{\text{c}} = -1; \quad \gamma_{00}^{\text{н}} = 1; \quad \gamma_{00}^{\text{c}} = 1.$$

Поэтому условия форминвариантности (20.7) метрики (20.23) при преобразовании координат вида (20.3) будут выполнены, если функции f и Ψ удовлетворяют уравнениям

$$\left[\Psi_t^2-c^2\Psi_x^2-2c\Psi_x\Psi_t\operatorname{sh}\frac{wt}{c}\right]\operatorname{ch}^2\frac{w\Psi}{c}-\operatorname{ch}^2\frac{wt}{c}=0;$$
$$f_t=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{ch}\frac{w\Psi}{c}+\sqrt{\Psi_t^2\operatorname{ch}^2\frac{w\Psi}{c}-1}\,; \qquad (20.24)$$
$$f_x=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{ch}\frac{w\Psi}{c}+b\sqrt{\Psi_x^2\operatorname{ch}^2\frac{w\Psi}{c}+\frac{1}{c^2}}\,.$$

Для решения этих уравнений применим подстановку:

$$\Psi=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{wu}{c}; \qquad (20.25)$$
$$t=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{w\tau}{c}=\frac{c}{w}\operatorname{Arch}\sqrt{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}.$$

Тогда уравнения (20.24) примут вид

$$u_\tau^2-\frac{c^2u_x^2}{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}-2u_\tau u_x\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}}-1=0;$$
$$f_\tau=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial\tau}\sqrt{1+\frac{w^2u^2}{c^2}}+a\sqrt{u_\tau^2-\frac{1}{1+\frac{w^2\tau^2}{c^2}}}\,, \qquad (20.26)$$
$$f_x=-\frac{c}{w}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+\frac{w^2u^2}{c^2}}+b\sqrt{u_x^2+\frac{1}{c^2}}\,.$$

Таким образом, уравнения (20.24) подстановкой (20.25) сводятся к уравнениям, рассмотренным в предыдущем случае. Это позволяет нам сразу же записать искомые преобразования:

$$t_c=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{w}{c}\left[\frac{\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_н}{c}+\frac{Vx_н}{c^2}+\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_н}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]+\Psi_0;$$
$$x_c=\frac{x_н+\frac{cV}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_н}{c}+\frac{c^2}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_н}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-$$
$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2-V^2}\left[\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_н}{c}+\frac{Vx_н}{c^2}+\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_н}{c}-1\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\Psi_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]+f_0. \qquad (20.27)$$

Обратные преобразования имеют вид

$$t_{\text{н}}=\frac{c}{w}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\frac{w}{c}\left[\frac{\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_c}{c}-\frac{Vx_c}{c^2}-\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_c}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-\frac{\Psi_0-\frac{Vf_0}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right];$$

$$x_{\text{н}}=\frac{x_c-\frac{cV}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_c}{c}+\frac{c^2}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_c}{c}-1\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-$$

$$-\frac{c^2}{w}\left[\left\{1+\frac{w^2}{c^2-V^2}\left[\frac{c}{w}\operatorname{sh}\frac{wt_c}{c}-\frac{Vx_c}{c^2}-\frac{V}{w}\left(\operatorname{ch}\frac{wt_c}{c}-1\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\Psi_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right]^2\right\}^{1/2}-1\right]-\frac{f_0-V\Psi_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Следует отметить, что в пространстве-времени как с метрикой (20.2), так и с метрикой (20.23), синхронизацию часов осуществить нельзя.

Покажем это на примере метрики (20.23). Интервал собственного времени в этом случае имеет вид

$$\tilde{d}\tau=dt-\frac{dx}{c}\operatorname{sh}\frac{wt}{c}. \tag{20.28}$$

Легко убедиться, что это выражение не является полным дифференциалом. Действительно, необходимым и достаточным условием того, чтобы выражение (20.28) было полным дифференциалом, является уравнение

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial t}=\frac{\partial^2\tau}{\partial t\,\partial x}, \tag{20.29}$$

гарантирующее независимость смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

В нашем случае, если бы выражение (20.28) являлось полным дифференциалом, частные производные первого порядка имели бы вид

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=1;\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}=-\frac{1}{c}\operatorname{sh}\frac{wt}{c}.$$

Дифференцируя первое из этих равенств по x, а второе по t, получим

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial t}=0;\quad \frac{\partial^2\tau}{\partial t\,\partial x}=-\frac{w}{c^2}\operatorname{ch}\frac{wt}{c}.$$

Отсюда следует, что условие (20.29) не выполняется.

Поскольку выражение (20.28) не является полным дифференциалом, то интегралы вида

$$\tau = \int_A^B \tilde{d}\tau$$

не будут однозначными функциями точек A и B, а будут зависеть также от формы пути интегрирования и от закона движения частицы по этому пути. Интеграл по замкнутому контуру также будет зависеть от пути интегрирования. Именно поэтому синхронизацию часов в рассматриваемом случае осуществить нельзя.

Таким образом, мы рассмотрели релятивистски равноускоренную систему отсчета, а затем поставили вопрос о наличии других ускоренных систем отсчета, квадратичная форма для которых форминвариантна квадратичной форме (20.2) исходной системы отсчета. Тогда во всех этих системах отсчета все уравнения физики будут форминвариантны, и все физические процессы в них будут протекать одинаковым образом, обеспечивая выполнение обобщенного принципа относительности. Как мы видели, таких систем отсчета оказалось бесконечно много. Ясно также, что эти преобразования образуют группу: если каждое преобразование не изменяет вида метрики, то и два последовательных преобразования (их сумма) также не будут изменять ее. Среди всех преобразований имеется обратное и тождественное (единичное).

Поэтому-то мы и можем сформулировать обобщенный принцип относительности: для любой неинерциальной системы отсчета можно указать бесконечный набор других неинерциальных систем отсчета, в которых метрика имеет одну и ту же функциональную форму, в результате чего все уравнения физики в этих системах отсчета форминвариантны, а поэтому никакими физическими экспериментами нельзя определить, в какой из таких ускоренных систем отсчета мы находимся. Таким образом, встав на точку зрения, что единое пространство-время обладает псевдоевклидовой геометрией, и рассмотрев с этой точки зрения системы координат, мы смогли по-новому взглянуть уже и на принцип относительности, а главное — существенно расширить область применения специальной теории относительности.

§ 21. Парадокс часов

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, движущиеся относительно друг друга со скоростью V. Назовем условно одну из этих систем отсчета покоящейся, а другую—движущейся. Пусть в каждой из них имеются абсолютно идентичные часы. Измерим с их помощью промежуток времени между какими-либо двумя событиями, происходящими в одной и той же точке движущейся системы отсчета. Тогда, как следует из выражения (4.1), часы покоящейся системы отсчета покажут бо́льшую величину промежутка, чем часы, находящиеся в движущейся системе отсчета. Этот эффект нашел свое экспериментальное подтверждение (одним из таких подтверждений является возрастание времени жизни движущихся μ-мезонов по сравнению с временем жизни μ-мезонов, покоящихся относительно наблюдателя) и в настоящее время не вызывает сомнения. Однако в силу равноправия всех инерциальных систем отсчета он обратим, поскольку часы, движущиеся в первоначальной системе отсчета, после перехода в сопутствующую инерциальную систему окажутся в ней покоящимися, а покоящиеся—движущимися.

Пусть в момент $t=0$ начала координат двух инерциальных систем отсчета совпадают. Если два наблюдателя, находящиеся в этих системах отсчета, в начале координат сверили свои часы в момент $t=0$, а затем разошлись, и по прошествии некоторого промежутка времени они вновь встретились в одной точке пространства, то что́ покажут их часы? Ответ на этот вопрос и является решением так называемого «парадокса часов».

Однако два наблюдателя, находящиеся в различных инерциальных системах отсчета, сверив свои часы в одной и той же точке пространства, в дальнейшем уже не смогут встретиться в какой-либо другой точке пространства, так как для этого по крайней мере одному из них пришлось бы прервать свое инерциальное движение и перейти на какое-то время в неинерциальную систему отсчета. А так как при этом нарушится равноправие часов, то вполне естественно, что при встрече часы, двигавшиеся неинерциально, будут отставать от часов, которые все время находились в инерциальной системе отсчета.

В научной литературе (см., например, [8, 11, 14, 18, 19, 64]) часто можно встретить утверждения, что влияние гравитационного поля и поля сил инерции на ход всех физических процессов одинаково, в результате чего переход к неинерциальной системе отсчета эквивалентен появлению в ней гравитационного поля. Поэтому и описание всех явлений, происходящих в неинерциальных системах отсчета (в том числе и решение парадокса часов), якобы возможно только с позиции общей теории относительности. Однако эти утверждения неправильны. Силы инерции и силы гравитации являются совершенно разными по своей природе, поскольку тензор кривизны для первых тождественно равен нулю, а для вторых — отличен от нуля. Следовательно, влияние первых на все физические процессы можно полностью устранить во всем пространстве (глобально) переходом к инерциальной системе отсчета, в то время как влияние вторых может быть устранено лишь в локальных областях пространства и не для всех физических процессов, а лишь для простейших, в уравнения которых не входит кривизна пространства-времени. Поэтому-то и описание всех физических явлений, происходящих в неинерциальных системах отсчета, полностью относится к специальной теории относительности и не требует перехода к общей теории относительности.

Это, в частности, означает, что и решение парадокса часов можно дать, оставаясь все время в рамках специальной теории относительности.

Проиллюстрируем это утверждение конкретным расчетом. Предположим, что у нас имеются двое идентичных часов, находящихся в одной и той же точке инерциальной системы отсчета. Их показания в начальный момент $t=0$ будем считать совпадающими. Пусть одни из этих часов все время покоятся в первоначальной точке и тем самым являются инерциальными. Другие часы под действием приложенной силы начинают в момент времени $t=0$ релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением $a=w>0$ и движутся так до момента $t=T_1$ по покоящимся часам. Далее действие силы на вторые часы прекращается, и они в течение временного промежутка $T_1 < t < T_1+T_2$ движутся равномерно. После этого к ним прикладывается тормозящая сила, под действием которой они начинают релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением $a = -w$ и движутся так до момента $t = 2T_1 + T_2$, в результате чего их скорость относительно первых часов становится равной нулю. Затем весь цикл повторяется в обратном порядке, и вторые часы прибывают в ту точку, в которой находятся первые часы.

Вычислим разность показаний этих часов в инерциальной системе отсчета, в которой покоятся первые часы. В силу симметрии задачи (четыре участка ускоренного движения и два — равномерного) показание покоящихся часов к моменту их встречи со вторыми будет равно

$$T = 4T_1 + 2T_2. \tag{21.1}$$

Для вторых часов аналогично

$$T' = 4T_1' + 2T_2',$$

где T_1' — величина промежутка времени от начала ускорения часов до его прекращения, измеренная движущимися часами, T_2' — величина промежутка собственного времени вторых часов, в течение которого они двигались равномерно между первым и вторым ускорениями.

Поскольку ускоренное движение вторых часов можно представить как непрерывный переход от одной мгновенно сопутствующей инерциальной системы отсчета к другой, то в силу соотношения (4.1) для определения величины T_1' имеем выражение

$$T_1' = \int_0^{T_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt. \tag{21.2}$$

В результате того, что на первом этапе движение вторых часов является релятивистски равноускоренным без начальной скорости, то из выражения (19.12) при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ имеем

$$\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} = \left[1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}\right]^{-1/2}.$$

Тогда соотношение (21.2) дает

$$T_1' = \frac{c}{w} \ln\left(\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}\right).$$

Поскольку при $T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + T_2$ движение вторых часов равномерное со скоростью

$$V = \frac{wT_1}{\sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}},$$

то из выражения (21.2) получим

$$T_2' = \frac{T_2}{\sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, к моменту встречи показание вторых часов будет

$$T' = \frac{4c}{w} \ln\left(\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}\right) + \frac{2T_2}{\sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}}. \quad (21.3)$$

Вычитая выражение (21.1) из (21.3), найдем разность $\Delta T = T' - T$ показаний часов в момент их встречи:

$$\Delta T = T' - T = \frac{4c}{w} \ln\left[\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}\right] - \\ - 4T_1 + 2T_2\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{w^2 T_1^2}{c^2}}} - 1\right]. \quad (21.4)$$

Легко убедиться, что при любых $w > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ величина ΔT будет отрицательной. Это означает, что в момент встречи показание вторых часов будет меньше показаний первых. Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета, в которой вторые часы все время покоятся. Эта система отсчета не является инерциальной, так как вторые часы часть времени движутся неравномерно относительно инерциальной системы отсчета, связанной с первыми часами, а оставшуюся часть времени они движутся равномерно. На первом этапе движение вторых часов является релятивистски равноускоренным, происходящим по закону

$$x_0 = \frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1 + \frac{w^2 t^2}{c^2}} - 1\right].$$

Как следует из выражения (20.1), координаты (x, t) второго наблюдателя на этом участке пути связаны с координатами (X, T) первого (инерциального) наблюдателя соотношением

$$x = X - x_0 = X - \frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1 + \frac{w^2T^2}{c^2}} - 1\right]. \tag{21.5}$$

Поэтому на данном отрезке пути метрика неинерциальной системы отсчета, связанной со вторыми часами, будет иметь вид

$$ds^2 = \frac{c^2\,dt^2}{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}} - \frac{2wt\,dx\,dt}{\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}} - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{21.6}$$

В этой системе отсчета вторые часы все время покоятся в точке $x = 0$, а первые движутся по геодезической

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{ml} u^m u^l = 0. \tag{21.7}$$

Определим закон их движения. Используя соотношение $g_{ni} g^{nl} = \delta^l_i$, имеем

$$g^{00} = 1; \quad g^{01} = -\frac{wt}{c\sqrt{1 + \frac{w^2t^2}{c^2}}}; \quad g^{11} = -\left[1 + \frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{-1}. \tag{21.8}$$

Из выражений (21.6) и (21.8) следует, что единственная неравная нулю компонента символов Кристоффеля имеет вид

$$\Gamma^1_{00} = \frac{w}{c^2\left[1 + \frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{3/2}}.$$

Поэтому уравнения движения (21.7) первых часов принимают вид

$$\frac{du^0}{ds} = 0; \quad \frac{du^1}{ds} + \Gamma^1_{00} u^0 u^0 = 0. \tag{21.9}$$

Так как $u^1 = (u^0/c)\,dx/dt$, то, используя первое из уравнений (21.9), а также соотношение $d/ds = (u^0/c)\,d/dt$, второе уравнение системы (21.9) приведем к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c^2\Gamma^1_{00} = 0.$$

Подставляя сюда явное выражение для Γ^1_{00}, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{w}{\left[1+\frac{w^2t^2}{c^2}\right]^{3/2}}=0.$$

Решая это обыкновенное дифференциальное уравнение с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, получим закон движения первых часов:

$$x=\frac{c^2}{w}\left[1-\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}\right]. \qquad (21.10)$$

Таким образом, мы имеем все необходимое для определения показания обоих часов к моменту окончания первого этапа в их движении. Собственное время $d\tau$ первых часов на данном этапе движения связано с координатным временем t соотношением

$$d\tau=\frac{1}{c}\,ds=dt\left[g_{00}+\frac{2}{c}\,g_{01}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Подставляя в это соотношение выражения (21.6) и (21.10), получим

$$d\tau=dt.$$

Таким образом, на первом этапе пути собственное время первых часов совпадает с координатным временем, поэтому, используя вторую из формул (21.5), найдем, что к концу данного этапа пути показание первых часов τ_1 будет равно $\tau_1=T_1$. Поскольку вторые часы покоятся относительно неинерциальной системы отсчета, то их собственное время можно определить из выражения

$$d\tau'=\sqrt{g_{00}}\,dt.$$

Так как первый этап пути занимает промежуток $0<t\leqslant T_1$ координатного времени, то в конце данного этапа показание τ_1' вторых часов будет равно

$$\tau_1'=\int\limits_0^{T_1}\sqrt{g_{00}}\,dt=\int\limits_0^{T_1}\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}=$$

$$=\frac{c}{w}\ln\left[\frac{wT_1}{c}+\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right]. \qquad (21.11)$$

В конце первого этапа пути по достижении скорости

$$v=\frac{wT_1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}},$$

действие ускоряющей силы на вторые часы прекращается, и они далее продолжают равномерное движение, поэтому закон движения начала отсчета системы, связанной с ними, на втором этапе пути имеет вид

$$x=vt.$$

Так так на данном этапе пути движение обоих часов является равномерным и прямолинейным, то и обе системы отсчета, связанные с ними, будут инерциальными. Поэтому координаты и время в этих системах отсчета, казалось бы, следовало связать преобразованием Лоренца (3.9). Однако в этом случае на втором этапе пути метрика в обеих системах отсчета будет галилеевой

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2, \qquad (21.12)$$

и, следовательно, в момент времени $t=T_1$, метрический тензор в системе отсчета, связанной со вторыми часами, должен скачком измениться от значения

$$g_{00}=\frac{1}{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}<1;\quad g_{01}=-\frac{wT_1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}};$$

$$g_{11}=-1;\quad g_{22}=-1;\quad g_{13}=-1$$

до значения

$$g_{00}=1;\quad g_{01}=0;\; g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1.$$

Поскольку метрический тензор пространства-времени должен быть непрерывной величиной, то мы должны согласовывать выбор координат на первом и втором этапах пути. Для этого у нас имеются две возможности. Первая из них является традиционной и состоит в изменении по некоторому закону $t=F(x,\ t')$ начала отсчета и темпа хода координатных часов в неинерциальной системе отсчета, связанной со вторым наблюдателем так, чтобы метрика этой системы отсчета стала диагональной и пространственные ее компоненты не зависели от времени. Такие системы отсчета в научной литературе называют жесткими. Тогда в жесткой системе отсчета при определенном выборе констант интегрирования можно добиться того, чтобы компонента g_{00} при неинерциальном движении системы отсчета принимала значение $g_{00}=1$ по крайней мере в двух различных наперед заданных моментах времени. Если первый из них считать началом неинерциального движения, а второй — окончанием, то метрика жесткой системы непрерывным образом может переходить в галилееву метрику (21.12) на участках инерциального движения. Однако такой путь является достаточно сложным и, кроме того, заранее не очевидно, что соответствующее преобразование $t=F(x, t')$ может быть найдено для любой неинерциальной системы отсчета.

Поэтому для обеспечения непрерывности метрического тензора при переходе системы отсчета от неинерциального движения к инерциальному, давайте используем новую возможность, открывшуюся в связи с проделанным нами ранее расширением класса инерциальных систем отсчета до класса обобщенных инерциальных систем отсчета. Обобщенные инерциальные системы отсчета, как детально показано в § 12—16, являются полностью равноправными в описании физических явлений с лоренцевыми инерциальными системами отсчета и могут иметь недиагональную метрику. Поэтому потребуем, чтобы при $t=T_1$ метрика неинерциальной системы отсчета, связанной со вторыми часами, непрерывным образом переходила в метрику обобщенной инерциальной системы отсчета. Для этого достаточно на втором этапе пути связать координаты и время второго наблюдателя (X, T) с координатами первого (x, t) соотношениями

$$x=X-x_0(T)=X-VT; \quad t=T,$$

где

$$V=\frac{wT_1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}}.$$

В этом случае в промежутке координатного времени $T_1 < t < T_1+T_2$ система отсчета, связанная со вторыми часами, имеет метрику

$$ds^2=c^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)dt^2-2V\,dx\,dt-dx^2-dy^2-dz^2. \qquad (21.13)$$

Легко убедиться в том, что при $t=T_1$ метрика (21.6) неинерциальной системы отсчета непрерывным образом переходит в метрику обобщенной инерциальнои системы отсчета (21.13). Используя уравнение геодезических (21.7), найдем закон движения первых часов относительно вторых. Так как в системе отсчета с метрикой (21.13) все компоненты $\Gamma^i_{nl}=0$, то, используя начальное условие $-\dot{x}=V$ при $t=T_1$, найдем

$$\frac{dx}{dt}=-V.$$

Поэтому и на втором этапе пути собственное время $d\tau$ первых часов

$$d\tau=\frac{1}{c}ds=dt\left[g_{00}+\frac{2}{c}g_{01}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

совпадает с координатным временем: $d\tau=dt$.

Поскольку на этом этапе движения координатное время t изменяется в интервале $T_1<t<T_1+T_2$, то по первым часам на него будет затрачено время $\tau_2=T_2$. Вторые же часы покоятся $(dx/dt=0)$ относительно выбранной нами системы отсчета, а, следовательно, их собственное время

$$d\tau'=\sqrt{g_{00}}\,dt.$$

Отсюда имеем

$$\tau_2'=\int\limits_{T_1}^{T_1+T_2}\sqrt{g_{00}}\,dt=T_2\sqrt{1-V^2/c^2}=\frac{T_2}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}}.$$

В силу симметрии задачи полученных данных достаточно, чтобы определить показания часов в момент их встречи после всего цикла движения. Действительно, показание первых часов τ, определяемое в системе отсчета, связанной со вторыми часами, может быть найдено из соотношения

$$\tau=4\tau_1+2\tau_2.$$

Совершенно аналогично, показание вторых часов τ', определяемое в той же системе отсчета, будет

$$\tau'=4\tau_1'+2\tau_2'.$$

Подставляя в эти равенства выражения для τ_1, τ_2, τ_1' и τ_2', получим

$$\tau' = \frac{4c}{w} \ln\left[\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right] + \frac{2T_2}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}}; \qquad (21.14)$$

$$\tau = 4T_1 + 2T_2.$$

Отсюда следует, что разность показаний часов в момент их встречи $\Delta\tau = \tau' - \tau$, определяемая в системе отсчета, связанной со вторыми часами,

$$\Delta\tau = \frac{4c}{w} \ln\left[\frac{wT_1}{c} + \sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}\right] - 4T_1 + 2T_2\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}}} - 1\right]. \qquad (21.15)$$

Сравнивая выражения (21.14) и (21.15) с выражениями (21.1), (21.3) и (21.4), легко убедиться, что расчет в системе отсчета, связанной с первыми часами, дает тот же результат, что и расчет в системе отсчета, связанной со вторыми часами: вторые часы после завершения всего цикла движения и встречи их с первыми окажутся отставшими от них.

Конкретное значение разности показаний часов зависит от w, T_1 и T_2. В частном случае, когда ускорение w стремится к бесконечности, а время ускоренного движения $T_1 \to 0$ так, чтобы скорость вторых часов

$$V = wT_1\left[1+\frac{w^2T_1^2}{c^2}\right]^{-1/2}$$

после ускорения была конечной величиной, из выражения (21.15) имеем

$$\Delta\tau = 2T_2\left[\sqrt{1-V^2/c^2} - 1\right].$$

Это соотношение показывает, что часы, которые испытывают мгновенные ускорения, а потом движутся сколь угодно долго инерциально, не равноправны с инерциальными часами. Таким образом, мы показали, что как в системе отсчета, связанной с первыми часами, так и в системе отсчета, связанной со вторыми часами, расчет разности показаний этих часов дает один и тот же результат. Это означает, что отставание часов, которые двигались неинерциально, от инерциальных часов является эффектом абсолютным, не зависящим от выбора системы отсчета.

§ 22. Связь между координатными и физическими величинами

Как я уже неоднократно говорил, все физические явления могут быть описаны физически и математически равноправно в произвольных допустимых координатах. Однако при описании физических явлений в произвольных координатах возникают два вида величин: координатные и физические. Мы уже встречались с ними при рассмотрении координатной и физической скоростей в случае произвольной инерциальной системы отсчета.

Для того чтобы понять различие этих двух видов величин и выяснить способ сопоставления физических и координатных величин в произвольной допустимой системе отсчета, рассмотрим простой случай: выясним, как связаны в произвольной инерциальной системе отсчета координатные время и расстояние с физическим временем и расстоянием. Поскольку эти два понятия — время и расстояние — играют в физике фундаментальную роль (так как все физические процессы происходят в пространстве и времени), то установленный в этом случае закон сопоставления координатным величинам физических будет носить не частный, а общий характер, справедливый и для остальных физических величин.

Рассмотрим в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени величину интервала

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{22.1}$$

Эта величина является инвариантом при всех допустимых преобразованиях координат пространства-времени. Выделяя в выражении (22.1) слагаемые, содержащие нулевые индексы, получим

$$ds^2 = c^2 g_{00}\, dt^2 + 2g_{0\alpha}\, c\, dt\, dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta =$$
$$= c^2 \left[\sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \varkappa_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{22.2}$$

где $\varkappa_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}$ — трехмерный метрический тензор.

Так как выражение для ds^2 инвариантно при всех допустимых преобразованиях координат, то и разбивка ds^2 на две такие части инвариантна: при всех допустимых преобразованиях координат величина

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}} \tag{22.3}$$

имеет времениподобный характер, а величина

$$dR^2 = \varkappa_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \tag{22.4}$$

— пространственноподобный. Эти величины являются физическими, поэтому величину (22.3) естественно назвать физическим временем, а величину (22.4)—квадратом физического расстояния. Они непосредственно связаны с интервалом (22.1) соотношением, напоминающим выражение (2.13) для интервала в галилеевых инерциальных системах отсчета

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - dR^2. \tag{22.5}$$

Следует отметить, что в общем случае выражение (22.3) не является полным дифференциалом. Условие обращения выражения (22.3) в полный дифференциал, как я уже упоминал, тесно связано с возможностью синхронизации часов в данной системе отсчета: синхронизация часов возможна только в тех системах отсчета, в которых величина $d\tau$ является полным дифференциалом.

Системы отсчета, в которых интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2\,dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2,$$

дают наиболее простую связь между физически измеримыми величинами $d\tau$ и dR и координатными величинами dT, dX, dY, dZ:

$$d\tau = dT; \quad dR^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

В других системах отсчета эта связь сложнее.

Таким образом, мы установили, что физически измеримое время $d\tau$ является линейной комбинацией координатного времени dt и координатного дифференциала dx^α, причем коэффициенты этой комбинации построены из компонент метрического тензора. Квадрат физически измеримого расстояния dR^2 является квадратичной формой координатных дифференциалов. Тогда, считая $cd\tau$ нулевой компонентой измеримого дифференциала dX^i, а dR^2 — квадратичной формой из его пространственных компонент, имеем

$$dX^{\bar{i}} = \lambda_l^{\bar{i}} dx^l,$$

где $\lambda_l^{\bar{i}}$ — некоторые базисные векторы, зависящие от метрики. В литературе шестнадцать компонент $\lambda_l^{\bar{i}}$ называют тетрадой.

Ввиду того, что величина интервала в физически измеримых дифференциалах является диагональной. то для определения компонент базисных векторов $\lambda_l^{\bar{i}}$ мы имеем следующее уравнение:

$$ds^2 = \gamma_{\bar{i}\bar{k}}\, dX^{\bar{i}}\, dX^{\bar{k}} = \lambda_l^{\bar{i}} \lambda_m^{\bar{k}} \gamma_{\bar{i}\bar{k}}\, dx^l\, dx^m = g_{lm}\, dx^l\, dx^m.$$

Отсюда получаем связь между метрическим тензором g_{lm} и тетрадой:

$$g_{lm} = \lambda_l^{\bar{i}} \lambda_m^{\bar{k}} \gamma_{\bar{i}\bar{k}}. \tag{22.6}$$

Таким образом, для определения шестнадцати компонент базисных векторов $\lambda_l^{\bar{i}}$ мы имеем только десять уравнений. Как их будем находить? Вспомним, что мы уже установили связь физического времени $d\tau$ с координатными величинами dx^l:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}} = \lambda_l^{\bar{0}}\, dx^l.$$

Отсюда мы уже можем определить четыре компоненты $\lambda_l^{\bar{0}}$:

$$\lambda_l^{\bar{0}} = \frac{g_{0l}}{\sqrt{g_{00}}}; \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{22.7}$$

Подставляя это выражение в уравнения (22.6), получим

$$\begin{gathered} (\lambda_0^{\bar{1}})^2 + (\lambda_0^{\bar{2}})^2 + (\lambda_0^{\bar{3}})^2 = 0; \\ \lambda_0^{\bar{1}} \lambda_\alpha^{\bar{1}} + \lambda_0^{\bar{2}} \lambda_\alpha^{\bar{2}} + \lambda_0^{\bar{3}} \lambda_\alpha^{\bar{3}} = 0; \\ -\varkappa_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^{\bar{\mu}} \lambda_\beta^{\bar{\nu}} \gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}. \end{gathered} \tag{22.8}$$

Из первого уравнения этой системы имеем

$$\lambda_0^{\bar{1}} = \lambda_0^{\bar{2}} = \lambda_0^{\bar{3}} = 0.$$

Тогда второе уравнение системы (22.8) будет выполняться тождественно.

Таким образом, для определения оставшихся девяти компонент $\lambda^{\bar\nu}_{\beta}$ имеем шесть уравнений:

$$-\varkappa_{\alpha\beta}=\lambda^{\bar\mu}_{\alpha}\lambda^{\bar\nu}_{\beta}\gamma_{\bar\mu\bar\nu}. \tag{22.9}$$

Однако эти уравнения являются уравнениями второй степени относительно неизвестных $\lambda^{\bar\nu}_{\beta}$, поэтому подсчет числа уравнений и числа неизвестных еще ничего не говорит о числе их решений. Для определения компонент $\lambda^{\bar\nu}_{\beta}$ поступим следующим образом. Рассмотрим покоящийся отрезок, ориентированный вдоль какой-либо оси, скажем оси x. Так как в этом случае $dy=dz=0$, то квадрат его длины dR^2 можно записать в виде

$$(dX^{\bar1})^2=dR^2=\varkappa_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}.$$

Учитывая, что $dX^{\bar1}=\lambda^{\bar1}_1 dx$ при $dy=dz=0$, получим

$$\lambda^{\bar1}_1=\sqrt{\varkappa_{11}}. \tag{22.10}$$

Ориентируя последовательно измеряемый отрезок вдоль остальных осей, найдем

$$\lambda^{\bar2}_2=\sqrt{\varkappa_{22}};\qquad \lambda^{\bar3}_3=\sqrt{\varkappa_{33}}. \tag{22.11}$$

Тогда оставшиеся шесть компонент λ^{α}_{β} будут удовлетворять шести уравнениям:

$$\begin{gathered}
(\lambda^{\bar2}_1)^2+(\lambda^{\bar3}_1)^2=0;\quad (\lambda^{\bar1}_2)^2+(\lambda^{\bar3}_2)^2=0;\\
(\lambda^{\bar1}_3)^2+(\lambda^{\bar2}_3)^2=0;\\
\lambda^{\bar1}_1\lambda^{\bar1}_2+\lambda^{\bar2}_1\lambda^{\bar2}_2+\lambda^{\bar3}_1\lambda^{\bar3}_2=0;\\
\lambda^{\bar1}_1\lambda^{\bar1}_3+\lambda^{\bar2}_1\lambda^{\bar2}_3+\lambda^{\bar3}_1\lambda^{\bar3}_3=0;\\
\lambda^{\bar1}_2\lambda^{\bar1}_3+\lambda^{\bar2}_2\lambda^{\bar2}_3+\lambda^{\bar3}_2\lambda^{\bar3}_3=0.
\end{gathered} \tag{22.12}$$

Из первых трех уравнений этой системы следует, что $\lambda^{\bar2}_1=\lambda^{\bar3}_1=\lambda^{\bar1}_2=\lambda^{\bar3}_2=\lambda^{\bar1}_3=\lambda^{\bar2}_3=0$. Легко убедиться, что и оставшиеся три уравнения системы (22.12) удовлетворяются при этом тождественно. Таким образом, все компоненты $\lambda^{\bar\alpha}_{\beta}$ определены.

Как мы установили, физические время и расстояние, являющиеся локальным 4-вектором, связаны с координатными дифференциалами dt и dx^α соотношением

$$dX^{\bar{i}} = \lambda^{\bar{i}}_l \, dx^l.$$

Из фундаментальности понятий пространства и времени следует, что эта связь имеет не частный, а общий характер, являясь законом, по которому координатному 4-вектору a^i сопоставляется физический 4-вектор

$$A^{\bar{i}} = \lambda^{\bar{i}}_l a^l. \qquad (22.13)$$

Обобщение этого закона на случай тензора произвольной валентности большого труда не составляет: пусть тензор $q^{lm \dots n}$ является координатным, тогда физически измеримый тензор $Q^{\bar{i}\bar{p} \dots \bar{k}}$ может быть получен по закону

$$Q^{\bar{i}\bar{p} \dots \bar{k}} = \lambda^{\bar{i}}_l \lambda^{\bar{p}}_m \dots \lambda^{\bar{k}}_n q^{lm \dots n}. \qquad (22.14)$$

Для ковариантных физически измеримых величин имеем

$$A_{\bar{i}} = \gamma_{\bar{i}\bar{k}} A^{\bar{k}},$$

т. е. для поднятия и опускания их индексов используется галилеевский метрический тензор $\gamma_{\bar{i}\bar{k}}$.

Поскольку инвариантному 4-объему

$$d\Omega = \sqrt{-g}\, c\, dt\, dx\, dy\, dz$$

сопоставляется физический 4-объем в галилеевых координатах

$$d\Omega = c\, dT\, dX\, dY\, dZ,$$

отсюда следует, что значение определителя метрического тензора $\gamma_{\bar{i}\bar{k}}$ равно единице.

§ 23. Уравнения и соотношения механики в произвольной инерциальной системе отсчета

Запишем теперь в произвольной инерциальной системе отсчета, метрика которой имеет вид (12.11), уравнения механики. Поскольку в этом случае справедливы соотношения

$$\begin{gathered} ds = c\left[g_{00}\left(1 - \frac{v^x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{v^x}{c_2}\right) - \frac{(v^y)^2 + (v^z)^2}{c^2} \right]^{1/2} dt; \\ u^0 = \frac{c\, dt}{ds}; \quad u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c} u^0; \quad F^\alpha = f^\alpha \frac{u^0}{c}, \end{gathered} \qquad (23.1)$$

из общековариантных уравнений (19.2) получим

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v^\alpha}{\sqrt{g_{00}\left(1-\frac{v^x}{c_1}\right)\left(1-\frac{v^x}{c_2}\right)-\frac{1}{c^2}(v^y)^2-\frac{1}{c^2}(v^z)^2}} = f^\alpha. \quad (23.2)$$

Используя определение 4-импульса материальной точки $p^i = m_0 c u^i$, эти уравнения запишем в виде

$$\frac{d}{dt} P^\alpha = f^\alpha. \quad (23.3)$$

Решая уравнения (23.2) или (23.3), мы можем определить все интересующие нас координатные величины как функции любых других координатных величин $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $v^\alpha(t)$, $p^i(t)$, $p^i(x, y, z)$ и т. п. Мы можем также найти соотношение между координатным временем и физическим временем (собственным временем какого-либо наблюдателя), и после этого выразить все полученные физические величины как функции от физического времени. Таким образом, описание механических явлений в произвольной инерциальной системе отсчета позволяет получить всю интересующую нас информацию о механическом движении.

Покажем, что развитый выше формализм, позволяющий сопоставлять координатным величинам физические величины, приводит к соотношениям, которые полностью согласуются с опытом.

Из опыта мы знаем, что энергия и импульс частицы зависят от ее физической скорости V по закону

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad P^{\overline{\alpha}} = \frac{m_0 V^{\overline{\alpha}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (23.4)$$

и эти величины составляют 4-вектор $P^i = (E/c, P^{\overline{\alpha}})$. Решая уравнения (23.3), мы получим координатный 4-вектор импульса частицы, движущейся с координатной скоростью v^α:

$$P^i = m_0 c u^i, \quad (23.5)$$

где

$$u^i = \left(\frac{c\,dt}{ds}, \quad v^\alpha \frac{dt}{ds}\right).$$

Используя определения (22.5), (11.7) и (4.13), получим

$$\frac{c\,d\tau}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - (dR^2)/c^2\,d\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (23.6)$$

Тогда для координатного 4-вектора скорости u^i имеем

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dt}{d\tau}; \quad u^\alpha = \frac{1}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \qquad (23.7)$$

Энергию и импульс в силу выражений (23.14) и (23.5) можно записать в виде

$$E = cP^{\bar{0}} = m_0 c^2 u^i \lambda_i^{\bar{0}}; \quad P^{\bar{\alpha}} = m_0 c u^i \lambda_i^{\bar{\alpha}}. \qquad (23.8)$$

Поскольку в рассматриваемом нами случае ненулевые компоненты тетрады $\lambda_k^{\bar{i}}$ имеют вид

$$\lambda_i^{\bar{0}} = \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}; \quad \lambda_1^{\bar{1}} = \sqrt{\varkappa_{11}}; \quad \lambda_2^{\bar{2}} = \lambda_3^{\bar{3}} = 1, \qquad (23.9)$$

то соотношения (23.7) и (23.8) приводят к следующему выражению для энергии:

$$E = m_0 c^2 u^i \lambda_i^{\bar{0}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left[\frac{dt}{d\tau}\lambda_0^{\bar{0}} + \frac{dx^\alpha}{c\,d\tau}\lambda_\alpha^{\bar{0}}\right] =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,\frac{\left[\sqrt{g_{00}}\,dt + \dfrac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]}{d\tau} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Таким образом, для энергии мы получили хорошо известное соотношение, которое согласуется с результатами опытов. Совершенно аналогично мы можем получить выражения и для компонент $P^{\bar{\alpha}}$ импульса

$$P^{\bar{1}} = m_0 c u^i \lambda_i^{\bar{1}} = m_0 c u^1 \lambda_1^{\bar{1}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{\sqrt{\varkappa_{11}}\,dx}{d\tau} = \frac{m_0 V^x}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$P^{\bar{2}} = m_0 c u^i \lambda_i^{\bar{2}} = m_0 c u^2 \lambda_2^{\bar{2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dY}{d\tau} = \frac{m_0 V^y}{\sqrt{1-V^2/c^2}};$$

$$P^{\bar{3}} = m_0 c u^i \lambda_i^{\bar{3}} = m_0 c u^3 \lambda_3^{\bar{3}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dZ}{d\tau} = \frac{m_0 V^z}{\sqrt{1-V^2c^2}}.$$

Таким образом, в нашем случае закон построения физических величин приводит к правильным выражениям для энергии и импульса частицы.

При этом, как мы видели, физические величины определяются не только соответствующими координатными величинами, но и метрикой, которая здесь входит в тетрадном представлении. Это еще раз подчеркивает тесную связь физических величин с геометрией пространства-времени.

§ 24. Уравнения электродинамики в произвольной инерциальной системе отсчета

Для решения различных электродинамических задач мы также можем использовать любые допустимые системы координат.

Общековариантные уравнения электромагнитного поля в произвольных координатах имеют вид

$$\nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i; \qquad (24.1)$$
$$\nabla_l F_{ik} + \nabla_i F_{kl} + \nabla_k F_{li} = 0,$$

где F_{ik} — тензор электромагнитного поля; j^i — 4-вектор тока. В связи с тем, что тензор электромагнитного поля обладает свойствами антисимметрии, его связь с 4-вектором — потенциалом A_i — сохраняет обычный вид:

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \qquad (24.2)$$

В силу антисимметрии тензора F_{ik} уравнения электромагнитного поля (24.1) можно записать в другом виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g} F^{ik}] = \frac{4\pi}{c} j^i; \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (24.3)$$

Как легко убедиться, последнее уравнение этой системы с учетом выражения (24.2) удовлетворяется тождественно, поэтому мы его в дальнейшем часто будем опускать.

Прежде чем построить общековариантный 4-вектор тока, напомним некоторые сведения о свойствах дельта-функции Дирака (подробнее см. [20—21]).

При обобщении понятий плотности массы и плотности заряда в применении к точечным частицам физики пришли к необходимости ввести в рассмотрение обобщенные функции. И в связи с тем, что эти функции по свойствам в корне отличались от обычных функций, математики весьма настороженно отнеслись к их появлению. Однако, поскольку время показало необходимость и полезность такого обобщения понятия функции, математики вскоре построили теорию обобщенных функций. Из всех обобщенных функций в физике наиболее широко используется дельта-функция Дирака.

Одномерная дельта-функция Дирака определяется требованиями

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & \text{при } x=0;\\ 0 & \text{при } x\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx=\begin{cases}1, & x_0\in(a,b);\\ 1/2, & x_0=a \text{ или } x_0=b;\\ 0, & x_0\notin[a,b].\end{cases}$$

Эти определения приводят к следующим свойствам дельта-функции Дирака:

$$\int_b^c f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a);\quad a\in(b,c);$$

$$\delta(-x)=\delta(x);\quad \delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|};\tag{24.4}$$

$$\delta(f(x))=\sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{\left|\frac{df}{dx}\right|},$$

где $f(x_n)=0$.

Обобщение одномерной дельта-функции Дирака на трехмерный случай дает

$$\delta(x)=\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3).$$

Поэтому в любой криволинейной системе координат имеем

$$\int \delta(x)\,dx^1\,dx^2\,dx^3=1.\tag{24.5}$$

Отсюда следует, что трехмерная дельта-функция Дирака обладает свойствами скалярной плотности веса 1 при трехмерных преобразованиях координат. Для доказательства этого утверждения достаточно произвести замену переменных в интеграле (24.5) и воспользоваться последним из свойств (24.4) дельта-функции.

В произвольных координатах 4-вектор тока, как мы видели, имеет вид

$$j^i=\rho_0 c u^i.\tag{24.6}$$

Этот 4-вектор удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\nabla_i j^i=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{-g}\,j^i\right]=0.\tag{24.7}$$

Уравнение непрерывности (24.7) можно записать и в виде

$$\frac{c}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha)\right]=0, \qquad (24.8)$$

причем это соотношение является общековариантным. В силу этого уравнения величина

$$q=\int\rho\,dV=\mathrm{const}$$

не зависит от времени. Таким образом, в произвольных координатах имеем

$$j^i=\left(\frac{\rho c}{\sqrt{-g}},\ \frac{\rho v^\alpha}{\sqrt{-g}}\right). \qquad (24.9)$$

Однако в трехмерном пространстве с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$ удобнее использовать плотность заряда ρ^*, связанную с сохраняющейся плотностью ρ соотношением

$$\rho^*=\frac{\rho}{\sqrt{\varkappa}}. \qquad (24.10)$$

В этом случае соотношение между величиной заряда de, находящегося в элементе трехмерного объема $\sqrt{\varkappa}\,dV$, и плотностью заряда ρ^* принимает трехмерно инвариантный вид:

$$de=\rho^*\sqrt{\varkappa}\,dx^1\,dx^2\,dx^3. \qquad (24.11)$$

При этом для точечного заряда имеем

$$\rho^*=\frac{q}{\sqrt{\varkappa}}\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3). \qquad (24.12)$$

Таким образом, с физической точки зрения, плотность ρ^* представляет собой величину заряда, отнесенного к единице инвариантного объема в трехмерном пространстве с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$. В силу определения (24.10) 4-вектор тока (24.6) мы можем записать и в терминах плотности ρ^*

$$j^i=\left[\frac{c\rho^*}{\sqrt{g_{00}}},\ \frac{\rho^* v^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}\right]. \qquad (24.13)$$

Поскольку мы имеем достаточно большой произвол в выборе координат, то координаты можно выбирать, исходя из требований удобства для решения той или иной задачи. В результате решения этих уравнений мы можем определить все интересующие нас координатные величины как функции координатных величин x, y, z, t. Используя соотношения § 22, мы можем потом найти зависимость физических величин от физических координат X, Y, Z и времени T. Таким образом, описание электродинамических явлений в произвольных координатах позволяет получить всю интересующую нас информацию об этом явлении.

Покажем теперь на примере произвольной инерциальной системы отсчета, что такое описание приводит к соотношениям между физическими величинами, которые полностью согласуются с данными опыта.

Найдем сначала выражение для компонент физического 4-вектора тока. Как мы уже знаем, физический 4-вектор тока, как и любой другой 4-вектор, связан с координатным 4-вектором соотношением

$$j^{\bar{i}} = \lambda_n^{\bar{i}} j^n. \tag{24.14}$$

Используя выражения (23.9) для компонент тетрады $\lambda_n^{\bar{i}}$, получим

$$j^{\bar{0}} = \rho^0 c u^i \lambda_i^{\bar{0}} = \rho_0 c \frac{dx^i}{ds} \lambda_i^{\bar{0}} = \rho_0 c \frac{d\tau}{ds} = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \rho c;$$

$$j^{\bar{\alpha}} = \rho_0 c u^i \lambda_i^{\bar{\alpha}} = \rho_0 \frac{dX^{\bar{\alpha}}}{d\tau} = \frac{\rho_0 V^\alpha}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \rho V^\alpha. \tag{24.15}$$

Таким образом, компоненты физического 4-вектора тока удовлетворяют хорошо известному соотношению

$$j^{\bar{\alpha}} = j^{\bar{0}} \frac{V^\alpha}{c}.$$

Найдем теперь закон преобразования компонент координатного 4-вектора тока (24.9) при переходе от одной инерциальной системы отсчета (13.8) к другой. При преобразовании координат 4-вектор, как известно, преобразуется по тензорному закону

$$j^i_{\text{н}} = \frac{\partial x^i_{\text{н}}}{\partial x^l_{\text{с}}} j^l_{\text{с}} (x_{\text{с}} (x_{\text{н}})).$$

Это выражение дает

$$j^0_{\text{н}} = \frac{\partial t_{\text{н}}}{\partial t_{\text{с}}} j^0_{\text{с}} + \frac{\partial t_{\text{н}}}{\partial x_{\text{с}}} c j^1_{\text{с}};$$

$$j^1_{\text{н}} = \frac{1}{c} \frac{\partial x_{\text{н}}}{\partial t_{\text{с}}} j^0_{\text{с}} + \frac{\partial x_{\text{н}}}{\partial x_{\text{с}}} j^1_{\text{с}}.$$

Используя формулы преобразования координат и времени (13.8), получим

$$
\begin{aligned}
j_{\text{н}}^0 &= \frac{j_{\text{с}}^0 + \frac{vc}{c_1 c_2}\, j_{\text{с}}^1}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}; \\
j_{\text{н}}^1 &= \frac{\left(1+\frac{v}{c_1}+\frac{v}{c_2}\right) j_{\text{с}}^1 - \frac{v}{c}\, j_{\text{с}}^0}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c_1}\right)\left(1+\frac{v}{c_2}\right)}}.
\end{aligned}
\tag{24.16}
$$

Найдем теперь закон преобразования физических компонент 4-вектора тока. Используя выражения (24.14) и (24.16), а также связь (15.4)—(15.7) между координатной и физической скоростями одной системы отсчета относительно другой, получим хорошо известные из опыта формулы преобразования:

$$
j_{\text{н}}^{\bar 0} = \frac{j_{\text{с}}^{\bar 0} - \frac{V}{c}\, j_{\text{с}}^{\bar 1}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad j_{\text{н}}^{\bar 1} = \frac{j_{\text{с}}^{\bar 1} - \frac{V}{c}\, j_{\text{с}}^{\bar 0}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.
$$

Приведем теперь уравнения Максвелла (24.3) к «векторному» виду. Для этого в трехмерном пространстве с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$ введем единичные антисимметричные тензоры $E^{\alpha\beta\gamma}$ и $E_{\alpha\beta\gamma}$:

$$
E^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\, e^{\alpha\beta\gamma}; \quad E_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\varkappa}\, e_{\alpha\beta\gamma},
$$

где $\varkappa$ — определитель метрического тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$;

$$
e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при наличии совпадающих индексов,} \\ \pm 1, & \text{если все индексы разные,} \end{cases}
$$

причем $e_{123} = -e_{213} = 1$.

Введем также обозначения для дифференциальных операций, обобщающих операции $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ и $\operatorname{div} \mathbf{A}$ на случай трехмерного риманова пространства с метрикой $\varkappa_{\alpha\beta}$:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \mathbf{A})^\alpha &= E^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\gamma; \\
\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{\varkappa} A^\alpha\right].
\end{aligned}
\tag{24.17}
$$

Используя эти операции, уравнения Максвелла (24.3) можно записать в «векторном» виде. Для этого введем координатные «векторы» магнитной индукции **B** и электрического смещения **D**:

$$B^{\alpha} = -\frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}; \quad D^{\alpha} = -\sqrt{g_{00}} F^{0\alpha}, \tag{24.18}$$

а также координатные «векторы» напряженности электрического и магнитного полей:

$$E_{\alpha} = F_{0\alpha}; \quad H_{\alpha} = -\frac{\sqrt{g_{00}}}{2} E_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma}. \tag{24.19}$$

«Векторы» (24.18) и (24.19) не являются независимыми:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{g_{00}}} + [\mathbf{Hn}]; \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{g_{00}}} + [\mathbf{nE}], \tag{24.20}$$

где

$$n_{\alpha} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}.$$

Разделяя пространственные и временные тензорные индексы во второй группе уравнений Максвелла (24.3), получим

$$\partial_0 F_{\gamma\beta} + \partial_{\gamma} F_{\beta 0} + \partial_{\beta} F_{0\gamma} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\partial_0 F_{\gamma\beta} + \partial_{\beta} E_{\gamma} - \partial_{\gamma} E_{\beta} = 0.$$

Умножим это выражение на $\sqrt{\varkappa}\, E^{\alpha\beta\gamma}$ и учтем, что

$$\partial_n \left(\sqrt{\varkappa}\, E^{\alpha\beta\gamma}\right) = \partial_n e^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Тогда полученное соотношение в силу определения (24.17) мы можем записать в виде

$$-\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varkappa}\mathbf{B}\right] = \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{24.21}$$

Совершенно аналогично из уравнений

$$\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0$$

после умножения на $\sqrt{\varkappa}\, E^{\alpha\beta\gamma}$ и тождественного преобразования получим

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Из первой группы уравнений Максвелла (24.3) при $i=0$ имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^*. \tag{24.22}$$

Совершенно аналогично при $i=\alpha$ получим

$$\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial t}[\sqrt{\varkappa}\mathbf{D}]-\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\frac{4\pi}{c}\rho^* v. \tag{24.23}$$

Таким образом, уравнения Максвелла (24.3) мы можем записать в «векторном» виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial t}[\sqrt{\varkappa}\mathbf{D}]+\frac{4\pi}{c}\rho^*\mathbf{v};$$
$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^*;\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0;$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c\sqrt{\varkappa}}\frac{\partial}{\partial t}[\sqrt{\varkappa}\mathbf{B}].$$

В этой связи необходимо особо подчеркнуть, что введенные выше «векторы» **E**, **D**, **B**, **H** не обладают свойствами 4-векторов. Это утверждение справедливо и в случае специальной теории относительности, в чем легко убедиться непосредственно из законов преобразования «векторов» **E** и **H** при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. По тензорному закону преобразуются компоненты тензора электромагнитного поля F_{ik}. Компоненты этого тензора в соответствии с правилами (24.18) и (24.19) сопоставляются с «векторами» **B** и **E**. В силу нековариантности этого правила «векторы» **B** и **E**, а также **H** и **D** при преобразованиях систем отсчета преобразуются не по тензорному закону, а поэтому и не являются 4-векторами. Однако исторически сложилось так, что привычным стало иметь дело с этими величинами, а не с тензором электромагнитного поля F_{ik}, т. е. выполнять все расчеты в терминах «векторов» **E** и **H**, не забывая при этом, что эти «векторы» преобразуются не по тензорному закону при переходе между различными инерциальными системами отсчета.

Используя определения (24.18) и (24.19), для компоненты T_0^0 тензора энергии-импульса электромагнитного поля получим

$$T_0^0=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{0\alpha}F^{0\alpha}+\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}\right)=\frac{(\mathbf{ED})+(\mathbf{BH})}{8\pi\sqrt{g_{00}}}. \tag{24.24}$$

Здесь учтено, что

$$E_{\alpha\beta\gamma}E^{\alpha\nu\mu}=(\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\mu}_{\gamma}-\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}).$$

Для потока энергии электромагнитного поля имеем

$$P^{\alpha}=T^{\alpha}_{0}=-\frac{1}{4\pi}F_{0\beta}F^{\alpha\beta}=-\frac{1}{4\pi}E_{\beta}F^{\alpha\beta}. \qquad (24.25)$$

Из выражения (24.19) следует, что

$$F^{\alpha\beta}=-\frac{E^{\mu\alpha\beta}}{\sqrt{g_{00}}}H_{\mu}.$$

Поэтому соотношение (24.25) может быть записано в виде

$$T^{\alpha}_{0}=\frac{1}{4\pi\sqrt{g_{00}}}E^{\alpha\beta\mu}E_{\beta}H_{\mu}.$$

Поскольку

$$([\mathbf{EH}])^{\alpha}=E^{\alpha\beta\mu}E_{\beta}H_{\mu},$$

то для вектора импульса электромагнитного поля имеем

$$\mathbf{P}=\frac{1}{4\pi\sqrt{g_{00}}}[\mathbf{EH}].$$

Найдем теперь закон преобразования координатных «векторов» **E**, **D**, **H** и **B** при переходе между различными инерциальными системами отсчета. Мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
E_1=F_{01};\quad E_2=F_{02};\quad E_3=F_{03};\\
D^1=-\sqrt{g_{00}}F^{01};\quad D^2=-\sqrt{g_{00}}F^{02};\quad D^3=-\sqrt{g_{00}}F^{03};\\
B^1=-\frac{F_{23}}{\sqrt{\varkappa}}=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{23};\quad B^2=\frac{F_{13}}{\sqrt{\varkappa}}=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{13}; \qquad (24.26)\\
B^3=-\frac{F_{12}}{\sqrt{\varkappa}}=-\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{12};\quad H_1=-\sqrt{-g}\,F^{23};\\
H_2=\sqrt{-g}F^{13};\quad H_3=-\sqrt{-g}F^{12}.
\end{gathered}$$

Так как компоненты координатного тензора F_{ik} преобразуются по тензорному закону

$$F^{\text{н}}_{ik}=\frac{\partial x^{l}_{\text{с}}}{\partial x^{i}_{\text{н}}}\frac{\partial x^{m}_{\text{с}}}{\partial x^{k}_{\text{н}}}F^{\text{с}}_{lm},$$

при переходе между различными инерциальными системами отсчета компоненты координатного «вектора» напряженности электрического поля обладают следующим трансформационным законом:

$$E_{\alpha}^{\text{н}}=F_{0\alpha}^{\text{н}}=\left(\frac{\partial t_{\text{с}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\beta}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}-\frac{\partial x_{\text{с}}^{\beta}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial t_{\text{с}}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}\right)E_{\beta}^{\text{с}}+\frac{1}{c}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\nu}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\beta}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}F_{\nu\beta}^{\text{с}}. \quad (24.27)$$

Учитывая, что

$$F_{\nu\beta}=-E_{\mu\nu\beta}B^{\mu},$$

получим

$$E_{\alpha}^{\text{н}}=\left(\frac{\partial t_{\text{с}}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\beta}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}-\frac{\partial x_{\text{с}}^{\beta}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial t_{\text{с}}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}\right)E_{\beta}^{\text{с}}-E_{\mu\nu\beta}B_{\text{с}}^{\mu}\frac{1}{c}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\nu}}{\partial t_{\text{н}}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\beta}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}. \quad (24.28)$$

Совершенно аналогично для пространственных компонент тензора электромагнитного поля получаем

$$F_{\alpha\beta}^{\text{н}}=c\left(\frac{\partial t_{\text{с}}}{\partial x_{\text{н}}^{\beta}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\nu}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}-\frac{\partial t_{\text{с}}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\nu}}{\partial x_{\text{н}}^{\beta}}\right)E_{\nu}^{\text{с}}-E_{\mu\nu\eta}B_{\text{с}}^{\eta}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\mu}}{\partial x_{\text{н}}^{\beta}}\frac{\partial x_{\text{с}}^{\nu}}{\partial x_{\text{н}}^{\alpha}}. \quad (24.29)$$

Поскольку при переходе между инерциальными системами координат метрика остается форминвариантной, то из соотношений (24.26) имеем

$$\begin{gathered}B_{\text{н}}^{1}=-\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{23}^{\text{н}};\quad B_{\text{н}}^{2}=\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{13}^{\text{н}};\\ B_{\text{н}}^{3}=-\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{-g}}F_{12}^{\text{н}}.\end{gathered} \quad (24.30)$$

Таким образом, выражения (24.28), (24.29) и (24.30) определяют закон преобразования компонент «векторов» **B** и **E** при переходах между инерциальными системами отсчета. Легко получить и соответствующие формулы преобразования координатных векторов **D** и **H**.

Найдем теперь закон преобразования компонент физических векторов **B**, **H**, **E** и **D** при переходе между различными инерциальными системами отсчета. Заметим прежде всего, что компоненты физических векторов **D** и **E**, а также **B** и **H** совпадают, если уравнения Максвелла рассматриваются в вакууме ($\varepsilon=\mu=1$):

$$D^{\bar{\alpha}}=E_{\bar{\alpha}};\quad B^{\bar{\alpha}}=H_{\bar{\alpha}}.$$

Это непосредственно следует из соотношений (24.26). Так, например, мы имеем

$$D^{\bar{\alpha}} = -\sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}}\, F^{\bar{0}\bar{\alpha}}.$$

Поскольку

$$\sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}} = 1;\quad F^{\bar{0}\bar{\alpha}} = \gamma^{\bar{0}\bar{0}}\gamma^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}F_{\bar{0}\bar{\beta}} = -F_{\bar{0}\bar{\alpha}},$$

то в силу выражения (24.19) имеем

$$D^{\bar{\alpha}} = E_{\bar{\alpha}}.$$

Найдем соотношения между компонентами координатного тензора и компонентами физически измеримых векторов $E_{\bar{\alpha}}$ и $B^{\bar{\alpha}}$.

Используя выражения (23.9) для компонент тетрады $\lambda_k^{\bar{n}}$, определим компоненты $\lambda_{\bar{l}}^{m} = \gamma_{\bar{l}\bar{n}} g^{mk} \lambda_k^{\bar{n}}$ этой же тетрады:

$$\begin{aligned} &\lambda_{\bar{1}}^{1} = -g^{11}\sqrt{\varkappa_{11}};\quad \lambda_{\bar{2}}^{2} = 1;\quad \lambda_{\bar{3}}^{3} = 1;\\ &\lambda_{\bar{0}}^{n} = \frac{\delta_0^n}{\sqrt{g_{00}}};\quad \lambda_{\bar{1}}^{0} = -g^{01}\sqrt{\varkappa_{11}}. \end{aligned} \tag{24.31}$$

Тогда для компонент физического вектора $E_{\bar{\alpha}}$ получим

$$\begin{aligned} &E_{\bar{1}} = F_{\bar{0}\bar{1}} = \lambda_{\bar{0}}^{n}\lambda_{\bar{1}}^{m}F_{nm} = -E_1 g^{11}\sqrt{\frac{\varkappa_{11}}{g_{00}}};\\ &E_{\bar{2}} = \frac{E_2}{\sqrt{g_{00}}};\quad E_{\bar{3}} = \frac{E_3}{\sqrt{g_{00}}}. \end{aligned} \tag{24.32}$$

Совершенно аналогично имеем

$$\begin{aligned} &B^{\bar{1}} = \sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}}\, F^{\bar{2}\bar{3}} = F_{23};\\ &B^{\bar{2}} = \sqrt{g_{\bar{0}\bar{0}}}\, F^{\bar{1}\bar{3}} = -g^{11}\sqrt{\varkappa_{11}}\, F_{13} - g^{01}\sqrt{\varkappa_{11}}\, F_{03};\\ &B^{\bar{3}} = F^{\bar{2}\bar{1}} = (g^{11}F_{12} + g^{01}F_{02})\sqrt{\varkappa_{11}}. \end{aligned} \tag{24.33}$$

Используя формулы преобразования (13.7) от одной инерциальной системы отсчета к другой, из соотношений

(24.28) и (24.29) получим

$$
\begin{aligned}
&E_1^{\text{н}}=E_1^{\text{с}};\quad F_{23}^{\text{н}}=F_{23}^{\text{с}};\\
&E_2^{\text{н}}=\left(\frac{c\,(c_2-c_1)-V\,(c_1+c_2)}{c\,(c_2-c_1)}E_2^{\text{с}}-\frac{2c_1c_2V}{c\,(c_2-c_1)}F_{12}^{\text{с}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
&E_3^{\text{н}}=\frac{[c\,(c_2-c_1)-V\,(c_1+c_2)]\,E_3^{\text{с}}-2c_1c_2VF_{13}^{\text{с}}}{c\,(c_2-c_1)\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
&F_{12}^{\text{н}}=\frac{2VE_2^{\text{с}}+[c\,(c_2-c_1)+V\,(c_1+c_2)]\,F_{12}^{\text{с}}}{c\,(c_2-c_1)\sqrt{1-V^2/c^2}};\\
&F_{13}^{\text{н}}=\frac{2VE_3^{\text{с}}+[c\,(c_2-c_1)+V\,(c_1+c_2)]\,F_{13}^{\text{с}}}{c\,(c_2-c_1)\sqrt{1-V^2/c^2}},
\end{aligned}
\tag{24.34}
$$

где V — физически измеримая скорость движения одной инерциальной системы относительно другой.

Учтем также связь между координатными и физическими компонентами тензора F_{ik}:

$$
\begin{aligned}
&E_1=F_{01}=\lambda_0^{\bar n}\lambda_1^{\bar m}F_{\bar n\bar m}=\sqrt{g_{00}\varkappa_{11}}\,F_{\bar 0\bar 1};\\
&E_2=F_{02}=\lambda_0^{\bar n}\lambda_2^{\bar m}F_{\bar n\bar m}=\sqrt{g_{00}}\,F_{02};\\
&E_3=F_{03}=\sqrt{g_{00}}\,F_{\bar 0\bar 3};\\
&F_{12}=\frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}}}F_{\bar 0\bar 2}+\sqrt{\varkappa_{11}}\,F_{\bar 1\bar 2};\\
&F_{23}=F_{\bar 2\bar 3};\quad F_{13}=\frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}}}F_{\bar 0\bar 3}\sqrt{\varkappa_{11}}\,F_{\bar 1\bar 3}.
\end{aligned}
\tag{24.35}
$$

Тогда из первого уравнения выражения (24.32) имеем

$$E_{\bar 1}^{\text{н}}=-g^{11}\sqrt{\frac{\varkappa_{11}}{g_{00}}}\,E_1^{\text{н}}.$$

Подставляя в правую часть этого равенства первое из уравнений (24.34), получим

$$E_{\bar 1}^{\text{н}}=-g^{11}\sqrt{\frac{\varkappa_{11}}{g_{00}}}\,E_1^{\text{с}}.$$

Но в силу первого равенства (24.35) это выражение можно записать в виде

$$E_{\bar 1}^{\text{н}}=-g^{11}\varkappa_{11}E_{\bar 1}^{\text{с}}.$$

Учитывая выражения для компонент тензоров g_{ik} и $\varkappa_{\alpha\beta}$, отсюда имеем

$$E^{\text{н}}_{\bar{1}} = E^{\text{с}}_{\bar{1}}.$$

Совершенно аналогично можно найти формулы преобразования и для остальных компонент физических векторов **B** и **E**:

$$\begin{gathered} B^{\text{н}}_{\bar{1}} = B^{\text{с}}_{\bar{1}}; \\ B^{\text{н}}_{\bar{2}} = \frac{B^{\text{с}}_{\bar{2}} - \frac{V}{c} E^{\text{с}}_{\bar{3}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad B^{\text{н}}_{\bar{3}} = \frac{B^{\text{с}}_{\bar{3}} + \frac{V}{c} E^{\text{с}}_{\bar{2}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ E^{\text{н}}_{\bar{2}} = \frac{E^{\text{с}}_{\bar{2}} + \frac{V}{c} B^{\text{с}}_{\bar{3}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad E^{\text{н}}_{\bar{3}} = \frac{E^{\text{с}}_{\bar{3}} - \frac{V}{c} B^{\text{с}}_{\bar{2}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{gathered} \tag{24.36}$$

Таким образом, получаем хорошо известные правила преобразования трехмерных компонент физических «векторов» напряженностей электрического и магнитного полей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Мы видим, что описание физических явлений возможно в любых допустимых системах координат, но каждый раз надо помнить, что наряду с координатным описанием должны быть физические величины, поскольку только они непосредственно связаны со структурой пространства-времени, т. е. с расстоянием и временным промежутком. Если это помнить, то переход от координатных величин к физическим не будет изменять все известные физические результаты, поэтому ясно, что от системы координат описание зависеть не будет.

Глава II

Геометрия и физика

Все физические процессы протекают в пространстве и времени, поэтому изучение геометрии пространства-времени и выяснение всех ее свойств играет важнейшую роль для физики. Наиболее ярко связь геометрии с физикой проявляется при анализе таких вопросов, как определение естественной геометрии для того или иного физического поля, выяснение возможностей для получения законов сохранения в теории, нахождение систем отсчета, неотличимых от некоторой заданной системы с точки зрения любого физического эксперимента. Решение всех этих вопросов существенно зависит от характера геометрии, позволяя дать однозначный положительный ответ в одних случаях и отрицательный — в других, поэтому возникает необходимость специально остановиться на обсуждении этих вопросов.

Однако, прежде чем начать изложение, я кратко напомню основные сведения из тензорного анализа и римановой геометрии [22—24], которые потребуются в дальнейшем.

§ 25. Тензорный анализ

Рассмотрим некоторую совокупность n независимых переменных $x^i = [x^1, x^2, \ldots, x^n]$. Эту совокупность можно рассматривать как систему координат в n-мерном пространстве в том смысле, что каждая система значений этих переменных определяет точку в пространстве. Зададим теперь систему n независимых вещественных функций $f^k(x^i)$, $k=1, \ldots, n$ от переменных x^i, непрерывных вместе с их частными производными до N-го порядка. Для того чтобы эти функции были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы якобиан

$$J = \det \left\| \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \right\| \tag{25.1}$$

был не равен нулю. Тогда совокупность переменных

$$x'^i = f^i (x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{25.2}$$

будет представлять собой другую систему координат в пространстве: если в правую часть равенств (25.2) подставить координаты x^i какой-либо точки A пространства, то эти равенства дадут координаты x'^i той же точки A в новой системе координат.

Так как якобиан (25.1) преобразования (25.2) отличен от нуля в каждой точке пространства, то преобразование (25.2) однозначно и обратимо, т. е. в окрестности каждой точки допускает обратное преобразование

$$x^i = \varphi^i (x'^1, x'^2, \ldots, x'^n). \tag{25.3}$$

Поскольку при описании различных физических процессов используются различные упорядоченные системы функций Ψ^a $(a = 1, 2, \ldots, m)$, заданные в каждой точке пространства или в некоторой его области, то нам следует изучить трансформационные свойства различных систем функций при преобразованиях координат (25.2).

Будем называть полем геометрического объекта (или просто геометрическим объектом) P-го порядка, заданным в n-мерном пространстве (или в некоторой его области) упорядоченную систему функций $\Psi^a (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ от координат этого пространства, определенную в каждой локальной системе координат и изменяющуюся при любом преобразовании (25.2) по закону

$$\Psi'^a (x') = Y^a \left(x', \frac{\partial x'^i}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^{k_1} \partial x^{k_2}}, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{\partial^p x'^i}{\partial x^{k_1} \partial x^{k_2} \ldots \partial x^{k_p}}, \quad \Psi^b (x(x')) \right); \; (a, b = 1, 2, \ldots, m). \tag{25.4}$$

Следует особо подчеркнуть, что все величины, стоящие в правой части закона преобразования любого геометрического объекта (25.4), должны быть выражены с помощью обратного преобразования (25.3) как функции штрихованных переменных $x'^1, x'^2, \ldots, x'^n$. Классификация геометрических объектов проводится в зависимости от вида преобразования (25.4). Наиболее простым геометрическим объектом является поле скаляра, определяемое в каждой системе координат Ω и Ω' одной функцией $\Psi(x)$ или $\Psi'(x')$ соответственно. При преобразовании координатной системы (25.2) скаляр преобразуется по закону

$$\Psi'(x')=\Psi(x(x')). \tag{25.5}$$

Выражения (25.2) и (25.5) дают возможность определить законы преобразований для градиента от скалярной функции $\partial\Psi(x)/\partial x^i$ и дифференциалов dx^i. Действительно, продифференцируем правую и левую части равенства (25.5) по x'^i:

$$\frac{\partial\Psi'(x')}{\partial x'^i}=\frac{\partial}{\partial x'^i}\Psi(x(x')).$$

Учитывая правило дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial}{\partial x'^i}\Psi(x(x'))=\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i},$$

имеем окончательно

$$\frac{\partial\Psi'(x)}{\partial x'^i}=\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}. \tag{25.6}$$

Напомню, что здесь и далее по одинаковым ко- и контравариантным индексам подразумевается суммирование. Совершенно аналогично, взяв дифференциалы от правой и левой частей равенства (25.2), имеем

$$dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k. \tag{25.7}$$

Мы видим, таким образом, что существуют по крайней мере два типа геометрических объектов первого порядка, обладающих одним индексом, которые при преобразованиях координат могут изменяться по законам (25.6) и (25.7) соответственно. Система функций, преобразующаяся как дифференциал, получила название контравариантного вектора. В каждой системе координат контравариантный вектор $a^i(x)$ определяется совокупностью n вещественных функций $a^i(x)=[a^1(x), a^2(x), \ldots, a^n(x)]$, взятых в определенном порядке, и преобразуется при переходе (25.2) к другой системе координат по закону

$$a'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k(x(x')). \tag{25.8}$$

Ковариантный вектор $a_i(x)$ также определяется совокупностью n вещественных функций $a_i(x) = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]$, взятых в определенном порядке, но при преобразовании координат (25.2) он преобразуется аналогично градиенту $\partial\Psi/\partial x^i$ от скаляра

$$a'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k(x(x')). \tag{25.9}$$

Более общим по сравнению с вектором геометрическим объектом первого порядка является тензор. k раз ковариантным и l раз контравариантным тензором $T^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$ мы будем называть геометрический объект, определяющийся в каждой локальной системе координат совокупностью n^{l+k} функций, взятых в определенном порядке и преобразующийся при переходе к другой системе координат (25.2) по закону

$$T'^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x') = \frac{\partial x^{a_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{a_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{a_k}}{\partial x'^{i_k}} \times \\ \times \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{b_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{b_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^{b_l}} T^{b_1 b_2 \ldots b_l}_{a_1 a_2 \ldots a_k}(x(x')). \tag{25.10}$$

Легко убедиться в том, что рассмотренные нами выше скаляр (25.5), контравариантный (25.8) и ковариантный (25.9) векторы являются частными случаями тензора при $k=0$, $l=0$; $k=0$, $l=1$ и $k=1$, $l=0$ соответственно.

Тензор при любом числе ко- и контравариантных индексов называется равным нулю в некоторой области пространства, если все его компоненты равны нулю в этой области. Из трансформационных свойств тензора (25.10) следует, что обращение его в нуль в некоторой области пространства инвариантно относительно выбора системы координат: если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в другой неособенной системе координат.

Следует отметить, что в силу правил дифференцирования сложных функций $x^i = x^i(x'(x''))$ и $x''^i = x''^i(x'(x))$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x''^\gamma} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x''^\gamma}; \quad \frac{\partial x''^i}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x''^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\gamma} \tag{25.11}$$

и свойства определителя

$$\det\left\|\frac{\partial x''}{\partial x}\right\| = \quad \left\|\frac{\partial x''}{\partial x'}\right\| \ \mathrm{et}\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\|$$

преобразования тензоров при преобразованиях координат образуют непрерывную группу преобразований.

Заканчивая обзор трансформационных свойств тензоров, отметим также, что символ Кронекера δ^i_k, являющийся тензором, в любой системе координат имеет следующие компоненты:

$$\delta^i_k = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k; \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases} \tag{25.12}$$

Переходя к тензорной алгебре, рассмотрим основные инвариантные операции над тензорами. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов у тензора.

Операция алгебраического сложения применима к тензорам, имеющим одинаковое число ко- и контравариантных индексов. Для получения алгебраической суммы двух или более тензоров в любой координатной системе, алгебраически складываются в каждой точке пространства соответствующие компоненты тензоров. В частном случае сложения тензоров второго ранга имеем

$$S^{ik}(x) = A^{ik}(x) + B^{ik}(x). \tag{25.13}$$

В отличие от сложения перемножать можно различные тензоры. Так, например, произведением тензора $A^{ik}(x)$ на тензор $B^l_m(x)$ мы будем называть тензор $c^{ikl}_m(x)$, компоненты которого в каждой координатной системе получаются перемножением соответствующих компонент сомножителей:

$$c^{ikl}_m(x) = A^{ik}(x)\,B^l_m(x). \tag{25.14}$$

Операция свертывания применима лишь к тензору, имеющему как ковариантные, так и контравариантные индексы.

Свертывание тензора $B^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p\ldots\nu_l}_{i_1i_2\ldots i_q\ldots i_k}$ по p-му контравариантному и q-му ковариантному индексам осуществляется умножением этого тензора на символ Кронекера $\delta^{i_q}_{\nu_p}$, в результате чего получается тензор с уменьшенными на единицу числами ко- и контравариантных индексов. В частном случае смешанного тензора второго ранга $B^i_k(x)$ результатом операции свертывания индексов и является скаляр $B(x)$:

$$B(x)=B^i_k(x)\,\delta^k_i=B^i_i(x). \tag{25.15}$$

Операция подстановки индексов позволяет по любому заданному тензору, имеющему два или более одноименных индекса, получить новый тензор путем изменения порядка двух или более индексов в записи первоначального тензора. Так как в определение тензора входит и порядок следования его верхних и нижних индексов, то полученный в результате операции подстановки индексов тензор будет отличаться от исходного тензора.

Пусть, например, мы имели тензор $A^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x)$. В результате операции подстановки индексов мы можем получить в общем случае три различных тензора:

$$B^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x)=A^{\nu_2\nu_1}_{i_1i_2}(x);$$
$$C^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x)=A^{\nu_1\nu_2}_{i_2i_1}(x);$$
$$Q^{\nu_1\nu_2}_{i_1i_2}(x)=A^{\nu_2\nu_1}_{i_2i_1}(x).$$

Операция подстановки индексов является составной частью операций симметрирования и альтернирования. Операция симметрирования по каким-либо N одноименным индексам тензора осуществляется следующим образом. Сначала производится $N!$ подстановок по этим индексам у исходного тензора. Затем берется среднее арифметическое всех полученных при этом $N!$ тензоров. Наиболее часто симметрирование проводят по двум индексам. Индексы, по которым проводится симметрирование, заключаются в круглые скобки:

$$A^{(j_1j_2)\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x)=\frac{1}{2!}\left[A^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x)+A^{j_2j_1\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x)\right],$$
$$A^{j_1j_2\ldots j_l}_{(i_1i_2)\ldots i_k}(x)=\frac{1}{2!}\left[A^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}(x)+A^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_2i_1\ldots i_k}(x)\right]. \tag{25.16}$$

Тензор, не меняющийся при любой подстановке нескольких одноименных индексов, мы будем называть симметрическим по этим индексам.

Для проведения операции альтернирования по N одноименным индексам тензора необходимо произвести $N!$ всевозможных подстановок этих индексов, изменить знаки у нечетных подстановок на противоположные и взять среднее арифметическое от всех полученных при этом $N!$ тензоров. Индексы, по которым проводится альтернирование, заключаются в квадратные скобки:

$$A^{[j_1 j_2]\,\ldots\, j_l}_{i_1 i_2\,\ldots\, i_k}(x)=\frac{1}{2!}\left[A^{j_1 j_2\,\ldots\, j_l}_{i_1 i_2\,\ldots\, i_k}(x)-A^{j_2 j_1\,\ldots\, j_l}_{i_1 i_2\,\ldots\, i_k}(x)\right];$$

$$A^{j_1 j_2\,\ldots\, j_l}_{[i_1 i_2]\,\ldots\, i_k}(x)=\frac{1}{2!}\left[A^{j_1 j_2\,\ldots\, j_l}_{i_1 i_2\,\ldots\, i_k}(x)-A^{j_1 j_2\,\ldots\, j_l}_{i_2 i_1\,\ldots\, i_k}(x)\right]. \qquad (25.17)$$

§ 26. Риманова геометрия

Римановым пространством V_n называется вещественное дифференцируемое многообразие M класса C^N (т. е. имеющее непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка $N > 1$ включительно), в каждой точке которого задано поле тензора

$$g_{ik}=g_{ik}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n), \qquad (26.1)$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$g_{ik}=g_{ki};\quad g=\det\|g_{ik}\|\neq 0. \qquad (26.2)$$

Тензор $g_{ik}=g_{ik}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ мы будем называть метрическим тензором риманова пространства V_n, определитель которого (26.2) в силу правила умножения определителей при преобразовании координат (25.2) обладает следующим трансформационным законом: $g'=gJ^{-2}$. Отсюда следует, что определитель метрического тензора риманова пространства V_n является скалярной плотностью веса $+2$.

С помощью метрического тензора в римановом пространстве можно ввести инвариантную дифференциальную форму

$$ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \qquad (26.3)$$

называемую основной метрической формой этого пространства (или интервалом риманова пространства V_n), обобщающую понятие квадрата дифференциала дуги на случай риманова пространства V_n. Это позволяет дать другое, эквивалентное первому, определение пространства V_n: римановым пространством V_n называется многообразие M, в котором задана инвариантная квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k,$$

где g_{ik} является функцией класса C^N и удовлетворяет условиям

$$\det\|g_{ik}\| \neq 0; \quad g_{ik} = g_{ki}.$$

В каждой точке риманова пространства V_n выражение (26.3) представляет собой алгебраическую квадратичную форму относительно дифференциалов dx^i. При преобразовании координат (25.2) преобразование дифференциалов dx^i в каждой точке риманова пространства V_n является линейным преобразованием с постоянными коэффициентами и поэтому в каждой фиксированной точке риманова пространства V_n можно применять алгебраическую теорию преобразований квадратичных форм. Согласно этой теории метрический тензор g_{ik}, который в данном случае является матрицей, может быть диагонализирован в этой точке. При этом в общем случае диагональные компоненты матрицы g_{ik} не все будут положительными при вещественных преобразованиях (25.2). Но в силу закона инерции квадратичных форм разность между числом положительных и числом отрицательных диагональных компонент будет постоянна при любом вещественном преобразовании, приводящим квадратичную форму к диагональному виду. Эта разность называется сигнатурой метрического тензора риманова пространства V_n в данной точке. Следует отметить, что сигнатурой метрического тензора часто называют также и совокупность знаков диагональных компонент этого тензора в каждой точке.

Таким образом, в произвольном римановом пространстве V_n интервал (26.3) в общем случае является знаконеопределенным. Будем называть в дальнейшем интервал (26.3) времениподобным (а), изотропным (б) и пространственноподобным (в), в зависимости от того, какой из трех случаев реализуется:

а) $ds^2 > 0$, б) $ds^2 = 0$, в) $ds^2 < 0$.

Поскольку определитель (26.2) ковариантного метрического тензора (26.1) отличен от нуля в каждой точке риманова пространства V_n, то мы можем построить контравариантный метрический тензор $g^{kl} = g^{kl}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, обратный ковариантному метрическому тензору g_{ik}, т. е. тензор, удовлетворяющий условиям

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \tag{26.4}$$

Наличие контравариантного и ковариантного метрических тензоров позволяет определить в римановом пространстве V_n ряд новых операций с тензорами. В частности, при помощи тензоров g_{ik} и g^{kl} в римановом пространстве V_n вводится операция поднятия тензорного индекса

$$A^p(x) = g^{mp} A_m(x). \tag{26.5}$$

Аналогичным образом определяется и операция опускания тензорного индекса

$$A_p(x) = g_{mp} A^m(x). \tag{26.6}$$

Эти операции имеют тензорный характер, в результате которых из исходного тензора получается тензор с другими числами ковариантных и контравариантных индексов.

Кроме того, в римановом пространстве V_n наличие метрического тензора позволяет естественным путем построить аппарат ковариантного (или, как иногда говорят, абсолютного) дифференцирования. Центральную роль в определении ковариантного дифференцирования играет понятие параллельного переноса тензора из бесконечно близкой точки в данную точку. Главная линейная часть разности между значением тензора в данной точке и ее значением, полученным в результате параллельного переноса из бесконечно близкой точки, и будет абсолютным дифференциалом, имеющим тензорный характер в римановом пространстве V_n. Проиллюстрируем сказанное простым примером.

Рассмотрим некоторый контравариантный тензор первого ранга. Пусть его значение в некоторой точке x^i есть

A^i, а в бесконечно близкой точке x^i+dx^i он равен A^i+dA^i. Поскольку dA^i является разностью компонент двух тензоров в бесконечно близких точках, при преобразованиях координат величина $dA^i=(\partial A^i/\partial x^l)\,dx^l$ преобразуется не по тензорному закону (25.10).

Произведем теперь параллельный перенос вектора A^i из точки x^i в бесконечно близкую точку x^i+dx^i. В результате параллельного переноса значение этого вектора в точке x^i+dx^i будет равно $A^i+\delta A^i$. Приращение вектора δA^i при параллельном переносе должно линейно зависеть от векторов A^i, dx^i и от величины Γ^i_{kl}, характеризующих риманово пространство V_n:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl}\,A^k dx^l. \tag{26.7}$$

В этом случае результат двух последовательных бесконечно малых параллельных переносов будет совпадать с результатом одного параллельного переноса из начальной точки в конечную, а результат параллельного переноса суммы двух векторов будет равен сумме приращений каждого из них при этом переносе.

Разность вектора A^i+dA^i и вектора $A^i+\delta A^i$, параллельно перенесенного из точки x^i в бесконечно близкую точку x^i+dx^i, будет равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{26.8}$$

Как можно показать, эта разность является тензором. Учитывая выражение (26.7), имеем

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{26.9}$$

Поскольку величины DA^i и dx^l являются тензорами, то и выражение, стоящее в скобках в правой части соотношения (26.9), является тензором, который называют ковариантной производной вектора A^i и обозначают

$$\nabla_l A^i = A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k. \tag{26.10}$$

Аналогичным образом можно построить и выражение для ковариантной производной от ковариантного вектора B_i:

$$\nabla_l B_i = \frac{\partial B_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}B_k. \tag{26.11}$$

Выражение для символов Кристоффеля второго рода Γ^i_{kl} (или, как их иногда называют, связностей риманова пространства) можно получить, если учесть, что при параллельном переносе величина скаляра не изменяется

$$\delta [g_{ik} A^i B^k] = 0.$$

После несложных вычислений имеем

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \tag{26.12}$$

Из определения (26.7) следует, что символы Кристоффеля второго рода не являются тензором. При преобразованиях координат (25.2) компоненты связности Γ^i_{kl} риманова пространства преобразуются по закону

$$\Gamma'^i_{kl}(x') = \Gamma^p_{ms}(x(x')) \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k \, \partial x'^l}. \tag{26.13}$$

Таким образом, связность риманова пространства V_n является линейным неоднородным геометрическим объектом второго порядка.

Приведем здесь также и необходимые для дальнейшего соотношения

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k}; \tag{26.14}$$

$$g^{kl} \Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{-g}\, g^{ik}], \tag{26.15}$$

которые легко получить из выражения (26.12), если учесть, что

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = -g g_{ik} dg^{ik}. \tag{26.16}$$

Выражения (26.10) и (26.11) для ковариантных производных контравариантного A^i и ковариантного B_i векторов легко могут быть обобщены на случай произвольной тензорной плотности.

Ковариантная производная от тензорной плотности $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x)$ веса w по координате x^m определяется следующим образом: к обычной производной этой плотности по координате x^m на каждый контравариантный индекс i_s

добавляется член

$$\Gamma^{i_s}_{mp} A^{i_1 \ldots i_{s-1} p i_{s+1} \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l},$$

а на каждый ковариантный индекс j_s — член

$$-\Gamma^{p}_{mj_s} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_{s-1} p j_{s+1} \ldots j_l},$$

после чего из полученного выражения вычитается член

$$w\Gamma^{s}_{ms} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
\nabla_m A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) &= \\
&= \frac{\partial}{\partial x^m} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) + \Gamma^{i_1}_{mp} A^{p i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) + \\
&+ \Gamma^{i_2}_{mp} A^{i_1 p \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) + \ldots + \Gamma^{i_k}_{mp} A^{i_1 i_2 \ldots p}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x) - \\
&- \Big[\Gamma^{p}_{mj_1} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{p j_2 \ldots j_l}(x) + \Gamma^{p}_{mj_2} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 p \ldots j_l}(x) + \ldots \\
&\ldots + \Gamma^{p}_{mj_l} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_p}(x)\Big] - w\Gamma^{s}_{ms} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_l}(x). \qquad (26.17)
\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи ковариантного дифференцирования тензорных плотностей.

1. Ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной:

$$\nabla_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}. \qquad (26.18)$$

2. Метрический тензор риманова пространства V_n ковариантно постоянен:

$$\nabla_k g^{li} = 0; \quad \nabla_k g_{li} = 0. \qquad (26.19)$$

3. Ковариантная дивергенция от плотности контравариантного вектора A^i веса $+1$ совпадает с «обычной» дивергенцией:

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}. \qquad (26.20)$$

4. Ковариантная дивергенция от плотности антисимметрического тензора F^{ik} веса $+1$ также совпадает

с «обычной» дивергенцией:

$$\nabla_k F^{ki} = \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^k}. \tag{26.21}$$

5. Результат альтернирования ковариантной производной от ковариантного вектора A_k в римановом пространстве не зависит от метрики:

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Совершенно аналогично результат альтернирования ковариантной производной от антисимметрического k раз ковариантного ($k > 1$) тензора в римановом пространстве V_n также не зависит от метрики риманова пространства:

$$\nabla_{[j} A_{i_1 i_2 \ldots i_l]} = \frac{\partial}{\partial x^{[j}} A_{i_1 i_2 \ldots i_l]}.$$

6. Ковариантная производная символов Кронекера равна нулю:

$$\nabla_k \delta^i_l = 0.$$

7. Определитель метрического тензора ковариантно постоянен:

$$\nabla_l g = 0. \tag{26.22}$$

8. Ковариантное дифференцирование суммы, разности и произведения тензоров подчиняется правилам обычного дифференцирования.

9. Вследствие условия независимости значений непрерывных вторых частных производных от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2}{\partial x^p \partial x^q} A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \frac{\partial^2}{\partial x^q \partial x^p} A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l}$$

результат ковариантного дифференцирования зависит от порядка ковариантных производных:

$$\begin{aligned} \nabla_p \nabla_q A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} &= \nabla_q \nabla_p A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} + \\ &+ \left[A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{s i_2 \ldots i_l} R^s_{i_1 qp} + A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 s \ldots i_l} R^s_{i_2 qp} + \ldots + A^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots s} R^s_{i_l qp} \right] - \\ &- \left[A^{s j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} R^{j_1}_{sqp} + A^{j_1 s \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_l} R^{j_2}_{sqp} + R^{j_k}_{sqp} A^{j_1 j_2 \ldots s}_{i_1 i_2 \ldots i_l} \right], \end{aligned} \tag{26.23}$$

где R^i_{klm} — тензор кривизны риманова пространства V_n (тензор Римана — Кристоффеля):

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{km} - \Gamma^i_{ms}\Gamma^s_{kl}. \qquad (26.24)$$

Опуская контравариантный индекс в этом выражении, получим запись тензора кривизны в ковариантных компонентах

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + \\ + g_{qp}\left(\Gamma^p_{kl}\Gamma^q_{mi} - \Gamma^p_{km}\Gamma^q_{il}\right). \qquad (26.25)$$

В силу своей конструкции тензор кривизны (26.25) обладает следующими свойствами симметрии:

а) антисимметрия относительно перестановки индексов в каждой из пар ik и lm:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} = R_{kiml}; \qquad (26.26)$$

б) симметрия по отношению к перестановке пар индексов ik и lm друг с другом:

$$R_{iklm} = R_{lmik}; \qquad (26.27)$$

в) равенство нулю результата альтернирования по любым трем индексам (тождество Риччи):

$$R_{[ikl]m} = \frac{1}{3!}\left(R_{iklm} + R_{likm} + R_{klim}\right) = 0. \qquad (26.28)$$

Кроме того, тензор кривизны (26.24) удовлетворяет тождеству Бианки — Падова:

$$R^i_{klm;\,p} + R^i_{kpl;\,m} + R^i_{kmp;\,l} = 0. \qquad (26.29)$$

Таким образом, в силу соотношений (26.26) — (26.28) тензор кривизны риманова пространства (26.25) имеет

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \qquad (26.30)$$

независимых компонент, через которые могут быть линейно выражены все n^4 компонент этого тензора. Свертывая индексы i и l в выражении (26.24), приходим к симметрическому тензору Риччи:

$$R_{km}=\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^i_{ki}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{is}\Gamma^s_{km}-\Gamma^i_{ms}\Gamma^s_{ki}. \qquad (26.31)$$

Поднимая один из индексов тензора Риччи (26.31) и свертывая его с другим, получим скаляр, называемый скалярной кривизной риманова пространства V_n:

$$R=R^i_i=g^{im}R_{im}. \qquad (26.32)$$

В римановой геометрии важную роль играет также тензор Гильберта, являющийся линейной комбинацией тензора Риччи и скалярной кривизны:

$$G^k_l=R^k_l-\frac{1}{2}\delta^k_l R. \qquad (26.33)$$

Легко убедиться, что поднятие индекса k в тождестве Бианки—Падова (26.29) и последующее свертывание индексов il и km в полученном выражении приводит к ковариантному уравнению сохранения тензора Гильберта (26.33)

$$\nabla_k G^k_l=0. \qquad (26.34)$$

Тензор кривизны является одной из важнейших характеристик риманова пространства V_n, отражающей внутренние свойства этого пространства.

В частности, условием приводимости квадратичной формы (26.3) к диагональному виду сразу во всех точках риманова пространства V_n является требование равенства нулю тензора кривизны:

$$R^i_{klm}=0. \qquad (26.35)$$

Риманово пространство V_n в этом случае называется плоским.

Более общим римановым пространством V_n является пространство постоянной кривизны, т. е. пространство V_n, в каждой точке которого кривизны его по возможным двумерным направлениям одинаковы.

В случае пространства постоянной кривизны тензор Римана—Кристоффеля (26.25) имеет вид

$$R_{ipml}=k\,(g_{im}g_{pl}-g_{il}g_{pm}), \qquad (26.36)$$

где k—кривизна.

В силу теоремы Шура в пространстве V_n $(n > 2)$ постоянной кривизны кривизна k сохраняет постоянное значение во всех точках:

$$k = \text{const}.$$

Из выражения (26.36) следует, что $R = kn(n-1)$, а поэтому при $n > 1$ для пространства V_n постоянной кривизны имеем следующее определение:

$$R_{ipml} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{im}g_{pl} - g_{il}g_{pm}), \tag{26.37}$$

где R — скалярная кривизна.

В зависимости от знака R возможны следующие три случая. Если $R > 0$, то пространство называется пространством постоянной положительной кривизны, или эллиптическим пространством (пространством Римана). Это пространство имеет конечный объем, но не имеет границ. При $R = 0$ пространство V_n называется плоским (евклидовым или псевдоевклидовым пространством). Если $R < 0$, то пространство V_n называется пространством постоянной отрицательной кривизны, или гиперболическим пространством (пространством Лобачевского). Последние два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем.

Изучим теперь свойства тензора кривизны риманова пространства V_n при $n = 1, 2, 3$. В случае $n = 1$ риманово пространство является одномерным и каждый из индексов в выражении (26.25) для тензора кривизны может принимать только одно значение. Следовательно, тензор кривизны этого пространства тождественно равен нулю, поскольку нельзя построить ни одну его компоненту, которая удовлетворяла бы условиям антисимметрии (26.26). Таким образом, одномерное риманово пространство V_1 с необходимостью является плоским.

В случае двумерного риманова пространства V_2 тензорные индексы могут принимать два значения: 1 и 2. Поэтому метрический тензор g_{ik} будет иметь три компоненты: g_{11}, g_{12} и g_{22}. Тензор кривизны (26.25) в этом случае может иметь ненулевую компоненту R_{1212}, а, следовательно, и другие компоненты, получаемые из нее подстановкой индексов с учетом свойств симметрии (26.26)—(26.27). Поскольку риманово пространство V_2

имеет только одну независимую компоненту тензора кривизны, то этот тензор может быть выражен через скалярную кривизну R и метрический тензор g_{ik}. Действительно, учитывая, что

$$R = 2R_{1212}\left[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\right],$$

получим

$$R_{1212} = \frac{R}{2\left[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\right]}.$$

Так как в римановом пространстве V_2 справедливо равенство

$$\left[g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\right]^{-1} = g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2,$$

то компоненту R_{1212} можно записать в виде

$$R_{1212} = \frac{R}{2}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}).$$

Таким образом, в римановом пространстве V_2 имеем

$$R_{iklm} = \frac{R}{2}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{lk}). \tag{26.38}$$

Следовательно, риманово пространство V_2 с необходимостью является пространством постоянной кривизны. Легко убедиться, что тензор Гильберта (26.33) этого пространства тождественно равен нулю

$$G^i_k \equiv 0. \tag{26.39}$$

В римановом пространстве V_3 тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. По шесть компонент имеют также тензор Риччи и метрический тензор этого пространства.

Совершенно аналогично случаю риманова пространства V_2 можно показать, что тензор кривизны риманова пространства V_3 может быть выражен через тензор Риччи и скалярную кривизну

$$R_{iklm} = -\frac{R}{2}(g_{il}g_{km} - g_{kl}g_{im}) + \\ + (R_{il}g_{km} + R_{km}g_{il} - R_{kl}g_{im} - R_{im}g_{kl}). \tag{26.40}$$

Однако в дальнейшем для нас будет представлять наибольший интерес риманово пространство V_4. Метрический тензор g_{ik} и тензор Риччи (26.31) этого пространства имеют по десять независимых компонент, в то время как тензор кривизны имеет двадцать независимых компонент, поэтому в римановом пространстве V_4 тензор кривизны в общем случае нельзя выразить через скалярную кривизну (26.32) и тензор Риччи (26.31).

Как мы знаем, все физические процессы протекают в пространстве и времени. Для описания этих процессов часто используется четырехмерное пространство событий, точками которого являются элементарные события. Очевидно, что пространство событий в общем случае является римановым пространством V_4. Однако одна из координат этого риманова пространства, а именно время, как показывает опыт, является выделенной. Выделенность этой координаты состоит в том, что после приведения квадратичной формы (26.3) в любой точке пространства событий к диагональному виду, квадрат дифференциала времени будет иметь знак, противоположный знаку квадратов дифференциалов остальных (пространственных) координат. Выбирая для определенности знак квадрата дифференциала времени в этом случае положительным, получим, что сигнатура метрики пространства событий равна -2 и имеет вид $(+, -, -, -)$.

Для подчеркивания выделенности времени мы будем называть пространство событий псевдоримановым пространством V_4 (или просто римановым пространством-временем), считая время нулевой координатой этого пространства:

$$x^0 = ct.$$

Если тензор кривизны псевдориманова пространства V_4 будет равен нулю, то это пространство мы будем называть псевдоевклидовым (или просто плоским пространством-временем). Условимся также считать, что латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а греческие — 1, 2, 3. В этом случае имеем:

$$x^i = [x^0, x^\alpha] = [ct, \mathbf{r}].$$

Следует отметить, что в псевдоримановом пространстве V_4 мы уже не можем производить произвольные преобразования (25.2) координат, а должны, в силу выделенности времени, использовать лишь допустимые системы координат, в которых компонента g_{00} положительна:

$$g_{00} > 0, \tag{26.41}$$

а трехмерная квадратичная форма $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ отрицательна:

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta < 0. \tag{26.42}$$

Тогда в любой системе координат, удовлетворяющей условиям (26.41)—(26.42), компонента x^0 будет всегда иметь характер времени, а компоненты x^α—характер пространственных координат.

В силу критерия Сильвестра, как я уже отмечал, требования (26.42) эквивалентны условиям

$$g_{11} < 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \tag{26.43}$$

Отметим также, что на компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора риманова пространства-времени условие допустимости системы координат не налагает никаких ограничений.

§ 27. Физическое поле и естественная геометрия для него

В любой физической теории, в которой полевой переменной является тензорная величина, форма дифференциальных уравнений поля не должна зависеть от выбора координат, в которых описывается данный процесс. Это может быть достигнуто двумя путями: использованием в уравнениях поля только ковариантных производных в естественной для этого процесса метрике пространства-времени, либо путем составления тензорной величины из функций поля и их частных (нековариантных) производных. В последнем случае уравнения поля будут существенно нелинейными.

Любому физическому полю соответствует некоторая геометрия, называемая естественной, именно такая, что в отсутствие взаимодействия с другими полями фронт свободной волны этого физического поля движется по геодезическим естественного пространства-времени.

Распространение фронта волны безмассового поля (уравнение характеристик) [9]

$$g^{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial x^k}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}=0, \qquad (27.1)$$

а также движение свободных материальных частиц (уравнение Гамильтона—Якоби)

$$g^{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi}{\partial x^k}=1 \qquad (27.2)$$

определяются метрическим тензором естественной для этих процессов геометрии.

Вопрос о выборе естественной геометрии—это вопрос о том, посредством какого эффективного метрического тензора свертываются старшие производные в плотности лагранжиана. Вполне возможна отмечавшаяся еще Лобачевским [25] ситуация, когда различные физические явления будут описываться в терминах различных естественных геометрий.

Из уравнений (27.1) и (27.2) следует, что естественная геометрия физической теории допускает экспериментальное определение на основе данных по движению пробных частиц и полей. Изучение движения пробных частиц с массой и безмассовых полей позволяет определить метрический тензор естественного пространства-времени с точностью до постоянного множителя [5].

Таким образом, изучение движения различных форм материи позволяет экспериментально проверить характер геометрии пространства-времени мира.

От характера геометрии пространства-времени в большой степени зависит возможность получения законов сохранения для замкнутой системы взаимодействующих полей. Как мы увидим далее, именно требование законов сохранения для замкнутой системы физических полей ограничивает наш выбор естественной геометрии лишь тремя типами четырехмерных геометрий.

Геометрия пространства-времени предопределяет также и существование или отсутствие группы преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным, а, следовательно, и наличие или отсутствие физически эквивалентных систем отсчета.

Проанализируем все эти вопросы в случае n-мерного риманова пространства V_n.

§ 28. Условие форминвариантности метрического тензора

Как следует из § 2, условие форминвариантности метрики при преобразовании координат (2.15) можно записать в виде

$$g'_{ik}(x) = g_{ik}(x). \tag{28.1}$$

Изучим его подробнее. Для этого рассмотрим инфинитезимальное преобразование координат

$$x'^i = x^i + \xi^i(x) \tag{28.2}$$

с бесконечно малым вектором $\xi^i(x)$ и определим условия, при которых уравнение (28.1) выполняется в первом порядке по $\xi^i(x)$. В этом случае уравнение (28.1) можно записать в виде

$$\delta_L g_{ik} = g'_{ik}(x) - g_{ik}(x) = 0, \tag{28.3}$$

где введено обозначение δ_L для вариации в духе дифференциала Ли (вариация Ли). Таким образом, условие форминвариантности метрики риманова пространства-времени (28.1) при инфинитезимальном преобразовании координат (28.2) эквивалентно требованию обращения в нуль вариации Ли от метрического тензора.

В соотношении (28.3) вариации Ли от каждой из $n(n+1)/2$ компонент метрического тензора риманова пространства-времени не являются независимыми и могут быть выражены через n компонент вектора $\xi^i(x)$. Найдем эту зависимость. По определению (28.3) имеем

$$\delta_L g^{ik} = g'^{ik}(x) - g^{ik}(x). \tag{28.4}$$

Ввиду того, что при преобразованиях координат метрический тензор риманова пространства-времени обладает трансформационным законом

$$g'^{ik}(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} g^{ml}(x(x')),$$

в случае преобразования (28.2) с точностью до линейных по $\xi^i(x)$ членов получим

$$g'^{ik}(x+\xi) = g^{ik}(x) + g^{is}(x)\,\partial_s\xi^k + g^{ks}(x)\,\partial_s\xi^i.$$

Отсюда следует, что

$$g'^{ik}(x)=g^{ik}(x)+g^{is}(x)\,\partial_s\xi^k+g^{ks}(x)\,\partial_s\xi^i-\xi^s\partial_s g^{ik}(x).$$

Подставляя это соотношение в выражение (28.4), имеем

$$\delta_{\text{L}}g^{ik}=g^{is}\,\partial_s\xi^k+g^{ks}\,\partial_s\xi^i-\xi^s\,\partial_s g^{ik}=\nabla^i\xi^k+\nabla^k\xi^i. \qquad (28.5)$$

В силу соотношения

$$\delta_{\text{L}}g_{ik}=-g_{is}g_{km}\delta_{\text{L}}g^{sm}$$

из (28.3) и (28.5) получим окончательно

$$\delta_{\text{L}}g_{ik}=-\nabla_i\xi_k-\nabla_k\xi_i=0. \qquad (28.6)$$

Таким образом, условие форминвариантности метрики (28.3) будет выполнено, если уравнения (28.6) имеют решение. В научной литературе уравнения (28.6) принято называть уравнениями Киллинга, а векторы $\xi^i(x)$, удовлетворяющие уравнениям (28.6), — векторами Киллинга.

§ 29. Геометрия пространства-времени и законы сохранения

Векторы Киллинга играют фундаментальную роль в физике. С одной стороны, как мы видели, существование векторов Киллинга в римановом пространстве-времени гарантирует и существование группы бесконечно малых преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным, а следовательно, гарантирует наличие физически эквивалентных систем отсчета, в которых все физические явления протекают одинаково при соответственных начальных и граничных условиях.

С другой стороны, существование векторов Киллинга тесно связано и с существованием интегральных законов сохранения для замкнутой системы взаимодействующих полей в римановом пространстве-времени. Как известно [27], построение теории любого физического поля может быть произведено на основе лагранжева формализма. В этом случае физическое поле описывается некоторой функцией координат и времени, называемой функцией поля, уравнения для которой могут быть получены из вариационного принципа стационарного действия. Кроме уравнений поля, лагранжев путь построения классической теории волновых полей дает возможность получать и ряд дифференциальных соотношений, носящих название дифференциальных законов сохранения. Эти соотношения являются следствиями инвариантности функции действия при преобразованиях координат пространства-времени и связывают между собой локальные динамические характеристики поля и их ковариантные производные в естественной для них геометрии.

В настоящее время в научной литературе принято различать два типа дифференциальных законов сохранения: сильные и слабые. Сильным законом сохранения обычно называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности функции действия при преобразованиях координат и не требует выполнения уравнений движения для поля. Слабые же законы сохранения могут быть получены из сильных, если учесть уравнения для системы взаимодействующих полей. Примером слабого закона сохранения может служить ковариантное уравнение сохранения полного тензора энергии-импульса системы в произвольном римановом пространстве-времени:

$$\nabla_m T^{ml} = \partial_m T^{ml} + \Gamma^m_{mi} T^{il} + \Gamma^l_{mi} T^{mi} = 0. \qquad (29.1)$$

Это уравнение может быть получено как следствие требования инвариантности функций действия системы взаимодействующих полей при произвольном бесконечно малом преобразовании координат и условии выполнения уравнений движения для всех полей.

Следует особо подчеркнуть, что, несмотря на название, дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают о сохранении чего-либо ни локально, ни глобально. Это просто дифференциальные тождества, связывающие различные характеристики поля, которые выполняются в силу того, что функция действия не изменяется при произвольном преобразовании координат (т. е. является скаляром). Свое название эти соотношения получили по аналогии с соответствующими дифференциальными законами сохранения в псевдоевклидовом пространстве-времени, в котором из дифференциальных законов сохранения можно получить и соответствующие интегральные законы. Так, например, записывая закон сохранения полного тензора энергии-импульса системы взаимодействующих полей (29.1) в декартовой системе координат псевдоевклидова пространства-времени, имеем

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}T^{0i}=-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}T^{i\alpha}.$$

Интегрируя это равенство по некоторому объему и используя теорему Остроградского—Гаусса, получим

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int T^{0i}\,dV=-\oint T^{\alpha i}\,dS_{\alpha}.$$

Это соотношение означает, что изменение энергии-импульса системы взаимодействующих полей в некотором объеме равно потоку энергии-импульса через поверхность, ограничивающую данный объем. Если поток энергии-импульса через некоторую поверхность отсутствует

$$\oint T^{\alpha i}\,dS_{\alpha}=0,$$

то мы приходим к закону сохранения полного 4-импульса изолированной системы:

$$\frac{d}{dt}P^{i}=0,$$

где

$$P^{i}=\frac{1}{c}\int T^{0i}\,dV.$$

Аналогичные интегральные соотношения в псевдоевклидовом пространстве-времени можно получить и для момента импульса.

В римановом же пространстве-времени наличие дифференциального ковариантного уравнения сохранения не гарантирует возможность получения соответствующего интегрального закона сохранения.

Возможность получения интегральных законов сохранения в римановом пространстве-времени целиком предопределяется его геометрией и тесно связана с существованием векторов Киллинга данного пространства-времени или, как иногда говорят, с наличием группы движений в римановом пространстве-времени. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее, поскольку развитый здесь формализм можно использовать для получения интегральных законов сохранения и в произвольных криволинейных системах координат псевдоевклидова пространства-времени. Умножим уравнение сохранения (29.1) на вектор Киллинга, т. е. на вектор $\eta_l(x)$, удовлетворяющий уравнениям Киллинга (28.6). В силу симметрии тензора T^{ml} полученное выражение может быть записано в виде

$$\eta_l \nabla_m T^{ml} = \nabla_m [\eta_l T^{ml}] = 0.$$

Используя свойства ковариантной производной, отсюда имеем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^m} [\sqrt{-g}\, T^{ml} \eta_l] = 0.$$

Так как левая часть этого равенства является скаляром, то мы можем умножить его на $\sqrt{-g}\, dV$ и проинтегрировать по некоторому объему. В результате получим интегральный закон сохранения в римановом пространстве-времени:

$$\frac{d}{dx^0} \int \sqrt{-g}\, T^{0l} \eta_l\, dV = -\oint \sqrt{-g}\, T^{\alpha l} \eta_l\, dS_\alpha. \qquad (29.2)$$

Если поток трехмерного вектора $T^{\alpha l} \eta_l$ через поверхность, ограничивающую объем, отсутствует, то

$$\int \sqrt{-g}\, T^{0l} \eta_l\, dV = \text{const}.$$

Таким образом, при наличии векторов Киллинга из дифференциального уравнения сохранения (29.1) можно получить и интегральные законы сохранения (29.2).

§ 30. Условия разрешимости уравнений Киллинга

Выясним теперь, при каких ограничениях на метрику риманова пространства-времени уравнения Киллинга (28.6) имеют решения, т. е. при каких условиях существует вектор, удовлетворяющий уравнениям (28.6).

Уравнения Киллинга (28.6) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Согласно общей теории [22] для выяснения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений в частных производных ее необходимо привести к виду

$$\frac{\partial \Theta^a}{\partial x^i} = \Psi^a_i (\Theta^b, x^l), \qquad (30.1)$$

где Θ^a — неизвестные функции; $i,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $a,\ b=1,\ 2,\ \ldots,\ M$. Тогда условия интегрируемости системы (30.1) можно получить из равенства

$$\frac{\partial^2\Theta^a}{\partial x^i\,\partial x^l}=\frac{\partial^2\Theta^a}{\partial x^l\,\partial x^i},$$

заменяя частные производные первого порядка правой частью уравнений (30.1):

$$\frac{\partial\Psi_i^a}{\partial x^l}+\frac{\partial\Psi_i^a}{\partial\Theta^b}\Psi_l^b=\frac{\partial\Psi_l^a}{\partial x^i}+\frac{\partial\Psi_l^a}{\partial\Theta^b}\Psi_i^b. \tag{30.2}$$

Если условия интегрируемости (30.2) выполняются тождественно в силу уравнений (30.1), то система (30.1) называется вполне интегрируемой и ее решение содержит M параметров — максимально возможное для данной системы число произвольных постоянных.

Если же система (30.1) не является вполне интегрируемой, то ее решение будет содержать меньшее число произвольных постоянных. Определим, при каких условиях решение уравнений Киллинга (28.6) в римановом пространстве V_n содержит максимально возможное число параметров, и чему равно это число.

Все вычисления будем вести в явно ковариантном виде, являющемся ковариантным обобщением приведенной выше схемы нахождения условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений в частных производных. Для этого сначала приведем уравнения Киллинга (28.6) к требуемому виду. Продифференцируем ковариантно уравнения Киллинга (28.6) по переменной x^l. В результате получим

$$\eta_{i;\,kl}+\eta_{k;\,il}=0.$$

В силу этого уравнения имеем

$$\eta_{i;\,jl}+\eta_{j;\,il}+\eta_{i;\,lj}+\eta_{l;\,ij}-\eta_{j;\,li}-\eta_{l;\,ji}=0.$$

Перегруппировав слагаемые в этом выражении, получим

$$\eta_{i;\,jl}+\eta_{i;\,lj}+[\eta_{j;\,il}-\eta_{j;\,li}]+[\eta_{l;\,ij}-\eta_{l;\,ji}]=0. \tag{30.3}$$

С другой стороны, в силу правила коммутации ковариантных производных, имеем

$$\eta_{i;\,lj}-\eta_{i;\,jl}=\eta_h R^h_{\ ilj}. \tag{30.4}$$

Подставляя выражение (30.4) в соотношение (30.3), получим

$$2\eta_{i;\,jl}+\eta_h R^h_{ilj}+\eta_h R^h_{jil}+\eta_h R^h_{lij}=0. \tag{30.5}$$

Воспользовавшись тождеством Риччи

$$R^h_{ijl}+R^h_{jli}+R^h_{lij}=0, \tag{30.6}$$

имеем

$$\eta_h R^h_{ilj}+\eta_h R^h_{jil}=\eta_h R^h_{lij}.$$

Поэтому выражение (30.5) можно записать в виде

$$\eta_{i;\,jl}=-\eta_h R^h_{lij}.$$

Таким образом, мы имеем следующие ковариантные уравнения:

$$\eta_{i;\,j}+\eta_{j;\,i}=0;\quad \eta_{i;\,jl}=-\eta_h R^h_{lij}. \tag{30.7}$$

Преобразуем эту систему ковариантных дифференциальных уравнений в систему, содержащую только первые ковариантные производные. Для этого наряду с n неизвестными компонентами вектора η_i введем неизвестный тензор λ_{ij} в соответствии с уравнением:

$$\eta_{i;\,j}=\lambda_{ij}. \tag{30.8}$$

Этот тензор содержит n^2 неизвестных компонент, но независимы среди них лишь $n(n-1)/2$ компонент, так как этот тензор является антисимметрическим в силу уравнений (28.6) и (30.8):

$$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}=0. \tag{30.9}$$

С учетом всего этого искомая система ковариантных дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}\eta_{i;\,j}&=\lambda_{ij};\\ \lambda_{ij;\,l}&=\eta_h R^h_{lji}.\end{aligned} \tag{30.10}$$

Таким образом, уравнения Киллинга (28.6) мы привели к системе специального вида, состоящей из линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка.

Эта система является ковариантным обобщением системы (30.1), причем роль неизвестных функций Θ^α играют

$n(n+1)/2$ компонент тензоров λ_{ij} и η_i

$$\Theta^\alpha = [\eta_i, \lambda_{ij}].$$

Условие интегрируемости системы (30.10) можно получить из правила коммутации ковариантных производных, являющегося следствием независимости порядка производных при частном дифференцировании. На основании этого правила имеем

$$\begin{aligned} &\eta_{i;\,jl} - \eta_{i;\,lj} = \eta_h R^h_{ijl};\\ &\lambda_{im;\,jl} - \lambda_{im;\,lj} = \lambda_{ih} R^h_{mjl} + \lambda_{hm} R^h_{ijl}. \end{aligned} \qquad (30.11)$$

Заменяя в левых частях этих равенств первые ковариантные производные выражениями (30.10) и используя свойство (30.9) антисимметричности тензора λ_{im}, условия интегрирования системы (30.10) получим в виде

$$\lambda_{im;\,j} - \lambda_{ij;\,m} = \eta_h R^h_{imj}; \qquad (30.12)$$

$$[\eta_h R^h_{jmi}]_{;\,l} - [\eta_h R^h_{lmi}]_{;\,j} = \lambda_{ih} R^h_{mjl} + \lambda_{hm} R^h_{ijl}. \qquad (30.13)$$

Легко убедиться в том, что первое из этих выражений тождественно выполняется в силу уравнений (30.10) системы и свойств тензора кривизны. Таким образом, если условие (30.13) будет тождественно выполняться в силу лишь свойств симметрии риманова пространства-времени, то система (30.10) будет вполне интегрируемой, а, следовательно, решение уравнений Киллинга (28.6) будет содержать максимально возможное число $M = n(n+1)/2$ произвольных постоянных. Поскольку неизвестные функции η_i и $\lambda_{im} = -\lambda_{mi}$, входящие в систему (30.10), при этом должны быть независимыми, то левая часть выражения (30.13) обращается в тождественный нуль лишь при выполнении условий

$$R^h_{mij;\,l} - R^h_{lij;\,m} = 0; \qquad (30.14)$$

$$\delta^s_j R^h_{iml} - \delta^h_j R^s_{iml} - \delta^s_i R^h_{jml} + \delta^h_i R^s_{jml} + \delta^s_l R^h_{mij} - \delta^h_l R^s_{mij} - \\ - \delta^s_m R^h_{lij} + \delta^h_m R^s_{lij} = 0. \qquad (30.15)$$

Свертывание выражения (30.15) по индексам l и s с учетом соотношений

$$R^s_{ims} = -R_{im}; \quad R^s_{smi} = 0$$

и тождества Риччи (30.6) дает

$$-(n-1) R^h_{mij} = \delta^h_j R_{mi} - \delta^h_i R_{jm}.$$

Отсюда следует, что

$$-R_{lmij}=\frac{1}{(n-1)}[g_{jl}R_{mi}-g_{il}R_{jm}]. \qquad (30.16)$$

Умножая это равенство на g^{mi}, получим

$$nR_{jl}=g_{jl}R.$$

Подставляя это соотношение в выражение (30.16), получим условие, в силу которого равенство (30.15) выполняется тождественно:

$$R_{lmij}=\frac{R}{n(n-1)}[g_{jl}g_{mi}-g_{il}g_{jm}]. \qquad (30.17)$$

Из выражения (30.17) и уравнения (30.14) следует требование, которому должна удовлетворять скалярная кривизна:

$$[\delta_j^h g_{im}-\delta_i^h g_{jm}]\frac{\partial}{\partial x^l}R-[\delta_j^h g_{li}-\delta_i^h g_{lj}]\frac{\partial}{\partial x^m}R=0.$$

Умножая это соотношение на $\delta_h^l g^{mi}$, имеем

$$(n-1)\frac{\partial}{\partial x^i}R=0.$$

Так как в рассматриваемом нами случае $n>1$, то для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы $R=\text{const}$. Следовательно, условия интегрируемости (30.14) и (30.15) уравнений Киллинга (28.6) будут выполняться тождественно, если и только если тензор кривизны риманова пространства-времени имеет вид

$$R_{lmij}=\frac{R}{n(n-1)}[g_{jl}g_{mi}-g_{il}g_{jm}],$$

где $R=\text{const}$.

Таким образом, уравнения Киллинга только тогда имеют решения, содержащие максимально возможное число $M=n(n+1)/2$ произвольных постоянных (параметров), когда риманово пространство V_n является пространством постоянной кривизны. Если же пространство V_n не является пространством постоянной кривизны, то число параметров будет меньше.

Следовательно, с математической точки зрения наличие интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса, а также существование группы физически эквивалентных систем отсчета являются отражением определенных свойств пространства-времени: его свойств однородности и изотропности. Существует три типа четырехмерных пространств [24], обладающих свойствами однородности и изотропности в такой степени, что они допускают введение десяти интегралов движения для замкнутой системы и десятипараметрической группы преобразований координат, оставляющих метрический тензор форминвариантным: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана). Первые два пространства являются бесконечными, имеющими бесконечный объем, третье пространство является замкнутым, имеющим конечный объем, но не имеющим границ.

§ 31. Векторы Киллинга и законы сохранения в псевдоевклидовом пространстве-времени

Найдем теперь векторы Киллинга в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени. Для этого запишем сначала уравнения Киллинга в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\eta_j+\frac{\partial}{\partial x^j}\eta_i=0.$$

Следовательно, для определения векторов Киллинга мы имеем систему из десяти линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Решая эту систему по общим правилам, получим

$$\eta_i=a_i+w_{ij}x^j, \tag{31.1}$$

где a_i — произвольный постоянный бесконечно малый вектор; w_{ij} — произвольный постоянный бесконечно малый тензор, удовлетворяющий условию

$$w_{ij}=-w_{ji}. \tag{31.2}$$

Таким образом, решение (31.1), как и следовало ожидать, содержит все десять произвольных параметров.

Поскольку в выражение (31.1) входят десять независимых параметров, то фактически мы имеем десять независимых векторов Киллинга, а соотношение (31.1) представляет собой линейную комбинацию этих десяти независимых векторов.

Выясним смысл этих параметров. Подставляя выражение (31.2) в соотношение (28.2), получим

$$x'^i = x^i + a^i + w^i_j x^j. \tag{31.3}$$

Из этого выражения видно, что четыре параметра a^i являются компонентами 4-вектора бесконечно малых трансляций системы отсчета. Три параметра $w_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора поворота на бесконечно малый угол вокруг некоторой оси (так называемые чистые вращения). Три параметра $w_{0\beta}$ описывают бесконечно малые повороты в плоскости x^0x^β, называемые лоренцевыми вращениями. Так как метрический тензор γ_{mi} форминвариантен относительно трансляций, то псевдоевклидово пространство-время является однородным; его свойства не зависят от того, в какой точке пространства-времени помещено начало координат. Аналогично из форминвариантности метрического тензора γ_{mi} при преобразованиях четырехмерных поворотов следует его изотропность. Это означает, что в псевдоевклидовом пространстве-времени все направления равноправны.

Таким образом, псевдоевклидово пространство-время допускает десятипараметрическую группу движений, состоящую из четырехпараметрической подгруппы трансляций и шестипараметрической подгруппы поворотов. Наличие этой группы движения и существование соответствующих векторов Киллинга гарантирует наличие десяти интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента импульса системы взаимодействующих полей.

Действительно, учитывая, что в декартовой системе координат $\sqrt{-g} = 1$, из общего соотношения (29.2) в случае подгруппы трансляций ($\eta_i = a_i$) имеем

$$\frac{d}{dx^0}\int T^{0i}a_i\,dV = -\oint T^{\alpha i}a_i\,dS_\alpha.$$

Так как a^i — произвольный постоянный вектор, то из этого равенства имеем

$$\frac{d}{dx^0}\int T^{0i}\,dV = -\oint T^{\alpha i}\,dS_\alpha.$$

Для изолированной системы взаимодействующих полей выражение в правой части этого соотношения равно нулю, в результате чего ее полный 4-импульс сохраняется:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{0i}\, dV = \mathrm{const}. \qquad (31.4)$$

Совершенно аналогично, при

$$\eta_i = w_{ij}x^j$$

получим

$$\frac{d}{dx^0}\int T^{0i}x^j w_{ij}\, dV = -\oint T^{\alpha i}x^j w_{ij}\, dS_\alpha.$$

Поскольку постоянный тензор w_{ij} является антисимметрическим, то отсюда следует интегральный закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dx^0}\int [T^{0i}x^j - T^{0j}x^i]\, dV = -\oint [T^{\alpha i}x^j - T^{\alpha j}x^i]\, dS_\alpha. \qquad (31.5)$$

Для изолированной системы ее полный момент импульса сохраняется из-за обращения в нуль правой части равенства (31.5):

$$M^{ij} = \frac{1}{c}\int [T^{0i}x^j - T^{0j}x^i]\, dV = \mathrm{const}. \qquad (31.6)$$

Следует отметить, что решение уравнений Киллинга (28.6) в произвольных криволинейных координатах псевдоевклидова пространства-времени в силу тензорного характера величин x^i и η^i мы можем получить из решения (31.1) этих уравнений в декартовой системе координат. Для этого перейдем в выражении (31.1) от декартовых координат x^i к произвольным криволинейным координатам $x^i_{\text{н}}$

$$x^i = f^i(x^l_{\text{н}}).$$

Тогда получим

$$\eta^{\text{н}}_i = \frac{\partial f^l}{\partial x^i_{\text{н}}}\eta_l(x_{\text{e}}(x_{\text{н}})).$$

Таким образом, в произвольной криволинейной системе координат псевдоевклидова пространства-времени векторы Киллинга имеют вид

$$\eta_i = \frac{\partial f^l}{\partial x^i_{\text{н}}}a_l + \frac{\partial f^l}{\partial x^i_{\text{н}}}f^j(x_{\text{н}})\, w_{lj}. \qquad (31.7)$$

Обобщение выражений (31.4)—(31.6) на случай произвольных криволинейных координат не представляет особого труда. Поступая аналогично проделанному выше, для 4-импульса изолированной системы получим

$$P^i = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g(x_н)}\, dx^1_н\, dx^2_н\, dx^3_н\, T^{0l}(x_н)\, \frac{\partial f^i(x_н)}{\partial x^l_н}.$$

Антисимметрический тензор момента импульса в этом случае имеет вид

$$M^{ij} = \frac{1}{c}\int dx^1_н\, dx^2_н\, dx^3_н \sqrt{-g(x_н)}\, T^{0s}(x_н)\times \\ \times\left[f^j(x_н)\frac{\partial f^i(x_н)}{\partial x^s_н} - f^i(x_н)\frac{\partial f^j(x_н)}{\partial x^s_н}\right].$$

Таким образом, от характера геометрии пространства-времени зависит как возможность получения интегральных законов сохранения, так и существование физически эквивалентных систем отсчета. В случае четырех измерений, в том числе и для физического пространства-времени, только пространства постоянной кривизны обладают всеми десятью интегральными законами сохранения и десятипараметрической группой физически эквивалентных систем; в других же пространствах число их меньше десяти.

Следует отметить, что, начиная с работ Пуанкаре [5], в научной литературе обсуждается вопрос о связи геометрии и физики. При этом утверждается, что поскольку только геометрия в соединении с физикой дает проверяемые на опыте вещи, то выбор геометрии для описания явлений может быть произвольным, хотя, быть может, и осложняющим описание. Однако, как мы видели, выбор геометрии не является предметом соглашения, а определяется физическими принципами: требованием законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения для замкнутой системы взаимодействующих полей. А так как эти физические законы повседневно проверяются при изучении свойств материи, то тем самым производится и проверка геометрии пространства-времени реального мира.

Таким образом, проведенный нами анализ показал, что электродинамика фактически привела к открытию единства пространства-времени. В результате этого открытия принцип относительности утратил свою ведущую роль в теории и стал следствием псевдоевклидовой геометрии единого пространства-времени.

Вместе с тем наличие псевдоевклидовой геометрии у пространства-времени позволило нам ввести новый принцип — обобщенный принцип относительности, справедливый как для инерциальных, так и для неинерциальных систем отсчета. Это обстоятельство явно указывает, что укоренившиеся в научной литературе [8, 11, 19, 64] утверждения о неприменимости специальной теории относительности к описанию физических процессов в неинерциальных системах отсчета являются неправильными.

§ 32. Риманова геометрия и гравитация

Среди всех взаимодействий в природе гравитационное занимает особое место. Во-первых, оно является универсальным, ему подвержены все известные формы материи. Во-вторых, его действие на вещество в корне отличается от действия других сил: как свидетельствуют результаты измерений искривления луча света и запаздывания радиосигнала в гравитационном поле Солнца, воздействие гравитационного поля на волну сводится к искривлению фронта волны. А так как распространение фронта волны безмассового поля (уравнение характеристик)

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=0$$

и также движение свободных материальных частиц (уравнение Гамильтона—Якоби)

$$g^{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^k}=m^2c^2$$

определяются метрическим тензором, то это означает, что гравитационное поле как бы изменяет геометрию для остальных полей материи. Поэтому возникает вопрос, можно ли ввести гравитационное поле так, чтобы его действие на остальные поля материи было эквивалентным изменению геометрии для этих полей, а само гравитационное поле можно было бы считать полем в духе Фарадея — Максвелла, с его обычными свойствами носителя энергии и импульса.

Ответ на этот вопрос дан в наших работах [28—30]. Мы далее будем следовать им. Как видно из результатов § 29 и 30, возможность получения интегральных законов сохранения в любой физической теории связана с существованием векторов Киллинга пространства-времени или, как иногда говорят, с наличием группы движений пространства (метрики). Существует лишь три типа четырехмерных пространств, обладающих свойствами однородности и изотропии в такой степени, что они допускают получение всех десяти интегральных законов сохранения для замкнутой системы: пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), пространство нулевой кривизны (псевдоевклидово пространство) и пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана).

Поскольку экспериментальные данные, полученные при изучении сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий, свидетельствуют о том, что для полей, связанных с этими взаимодействиями в отсутствие гравитационного поля, геометрия пространства-времени является псевдоевклидовой, то можно высказать гипотезу, что эта геометрия является единой для всех физических процессов, в том числе и для гравитационных. Существование закона сохранения энергии-импульса для замкнутой системы, независимо от закона сохранения момента импульса, из трех геометрий с постоянной кривизной выделяет геометрию пространства-времени с нулевой кривизной — псевдоевклидово пространство.

Другим ключевым пунктом развиваемого нами полевого подхода является принцип тождественности (принцип геометризации), утверждающий, что уравнения движения вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени с метрическим тензором γ_{ik} могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в некотором эффективном римановом пространстве-времени с метрическим тензором g_{ik}, зависящим от гравитационного поля и метрического тензора γ_{ik}. Таким образом, этот принцип определяет, с одной стороны, эквивалентность двух способов описания движения вещества под действием гравитационного поля, а с другой стороны, определяет характер взаимодействия гравитационного поля с веществом и соответствует определенному выбору лагранжиана взаимодействия гравитационного поля с веществом. Следует отметить, что полевой подход к теории гравитационного взаимодействия не конкретизирует природу гравитационного поля. Мы не знаем, какова природа гравитационного поля, только время и новые экспериментальные факты позволят ответить на этот вопрос. Одна из возможных реализаций этого подхода состоит в использовании симметрического тензорного поля второго ранга в качестве гравитационного поля.

Изучим теперь характер законов сохранения для всех таких локальных теорий гравитации, не связывая себя конкретным выбором плотности лагранжиана. Исходя из основных принципов полевого подхода, плотность лагранжиана системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, мы можем записать в виде

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_g(\gamma_{ik},\ \varphi_{ik})+\mathfrak{L}_{\text{м}}(g_{ik},\ \varphi_A), \tag{32.1}$$

где γ_{ik} — метрический тензор псевдоевклидова пространства-времени, g_{ik} — метрический тензор эффективного риманова пространства-времени, φ_{ik} — гравитационное поле, φ_A — остальные поля материи. Не ограничивая общности, будем считать, что метрический тензор g_{ik} является локальной функцией, зависящей от метрического тензора γ_{ik} гравитационного поля φ_{ik} и их частных производных до второго порядка включительно:

$$g_{lm}=g_{lm}(\gamma_{ik},\ \partial_s\gamma_{ik},\ \partial_{st}\gamma_{ik},\ \varphi_{ik},\ \partial_s\varphi_{ik},\ \partial_{st}\varphi_{ik},\ \ldots \\ \ldots,\ \gamma^{ik},\ \partial_s\gamma^{ik},\ \partial_{st}\gamma^{ik}). \tag{32.2}$$

Плотность лагранжиана вещества $\mathfrak{L}_{\text{м}}$ будем считать зависящей от метрического тензора g_{ik} и полей материи φ_A, причем поля материи входят в плотность лагранжиана вместе со своими производными не выше первого порядка. Легко убедиться, что в этом случае в плотность лагранжиана вещества войдут частные производные гравитационного поля вплоть до второго порядка. Плотность лагранжиана гравитационного поля $\mathfrak{L}_g$ будем считать зависящей от метрического тензора γ_{ik}, гравитационного поля и их частных производных до третьего порядка включительно. Для получения законов сохранения воспользуемся, как это было сделано в § 9, ковариантным методом бесконечно малых смещений. Поскольку действие S является скаляром, то при произвольно малом преобразовании координат

$$x'^i = x^i + \xi^i(x) \tag{32.3}$$

вариации действия вещества $\delta S_м$ и гравитационного поля δS_g будут равны нулю. Так как в плотность лагранжиана вещества войдут как ковариантные, так и контравариантные компоненты метрического тензора, то плотность лагранжиана будем варьировать по ним как по независимым, а затем учтем соотношение между их вариациями

$$\delta g^{lm} = -g^{im} g^{ln} \delta g_{in}.$$

Совершенно аналогично мы будем поступать и при варьировании по компонентам γ_{ik} и γ^{lm} метрического тензора плоского пространства-времени.

Поступая аналогично случаю, рассмотренному в § 9, вариацию интеграла действия вещества при преобразовании (32.3) запишем в виде

$$\delta S_м = \frac{1}{c}\int d^4x \left(\frac{\Delta \mathfrak{L}_м}{\Delta g_{in}} \delta_L g_{in} + \frac{\delta \mathfrak{L}_м}{\delta \varphi_A} \delta_L \varphi_A + \mathrm{Div}\right) = 0, \tag{32,4}$$

где Div означает дивергентные члены, учет которых приводит к соотношениям, несущественным для нашего рассмотрения. Определим входящие в это выражение вариации Ли. В силу общего определения для метрического тензора имеем

$$\delta_L g_{in} = \delta_c g_{in} - \xi^l \partial_l g_{in}.$$

Так как метрический тензор эффективного риманова пространства-времени, как и всякий тензор второго ранга, обладает трансформационным законом

$$g'_{in}(x+\xi) = \frac{\partial x^q}{\partial x'^i} \frac{\partial x^p}{\partial x'^n} g_{pq}(x),$$

то легко получить

$$g'_{in}(x+\xi) = g_{in}(x) - g_{il}\partial_n \xi^l - g_{nl}\partial_i \xi^l.$$

Поэтому координатная вариация δ_c метрического тензора g_{in} будет равна

$$\delta_c g_{in} = g'_{in}(x+\xi) - g_{in}(x) = -g_{il}\partial_n \xi^l - g_{nl}\partial_i \xi^l.$$

Следовательно,

$$\delta_L g_{in} = -g_{il}\partial_n \xi^l - g_{nl}\partial_i \xi^l - \xi^l \partial_l g_{in}$$

или в ковариантной форме

$$\delta_{\mathrm{L}} g_{in} = -g_{il} D_n \xi^l - g_{nl} D_i \xi^l - \xi^l D_l g_{in}. \tag{32.5}$$

Поскольку геометрическая природа полей материи φ_A не конкретизируется заранее, то вариацию Ли от них запишем в общем виде

$$\delta_{\mathrm{L}} \varphi_A = -\xi^l D_l \varphi_A + F^{B;\,n}_{A;\,l}\, \varphi_B D_n \xi^l, \tag{32.6}$$

где тензор F может принимать тот или иной вид в зависимости от геометрического типа поля φ_A. Вводя обозначение

$$T^{ik} = -2\frac{\Delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\Delta g_{ik}} = -2\left[\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta g_{ik}} - g^{is} g^{kp} \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta g^{ps}}\right]$$

для тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве-времени и подставляя соотношения (32.5) и (32.6) в выражение (32.4), после тождественного преобразования получим

$$\delta S_{\text{м}} = \frac{1}{c}\int dx \Bigg(-\xi^l \Bigg[D_n (g_{il} T^{in}) - \frac{1}{2} T^{in} D_l g_{in} + \\ + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_l \varphi_A + D_n \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F^{B;\,n}_{A;\,l} \varphi_B\right)\Bigg] + \mathrm{Div}\Bigg) = 0.$$

Так как вектор ξ^l и его производные в этом выражении являются произвольными, то отсюда можно получить следующий сильный закон сохранения:

$$D_n (g_{il} T^{in}) - \frac{1}{2} T^{in} D_l g_{in} = -\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_l \varphi_A - D_n \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F^{B;\,n}_{A;\,l} \varphi_B\right).$$

Выразим теперь ковариантные производные, стоящие в левой части этого тождества, через частные производные и связности плоского пространства-времени γ^l_{ip}. Учитывая, что T^{in} — плотность тензора веса $+1$, получим

$$\partial_n (g_{il} T^{in}) - \frac{1}{2} T^{in} \partial_l g_{in} = -\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_l \varphi_A - D_n \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F^{B;\,n}_{A;\,l} \varphi_B\right).$$

Выражая $\partial_l g_{in}$ через связности эффективного риманова пространства-времени $\partial_l g_{in} = -g_{is}\Gamma^s_{ln} - g_{ns}\Gamma^s_{li}$, получим

$$g_{il} \nabla_n T^{in} = -\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_l \varphi_A - D_n \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F^{B;\,n}_{A;\,l} \varphi_B\right), \tag{32.7}$$

где введено обозначение ∇_n для ковариантной производной по метрике эффективного риманова пространства-времени. Другое важное тождество получим, если учтем, что метрический тензор эффективного риманова пространства-времени фактически построен из φ_{ik} и метрики γ_{ik}. Вариация функции действия для вещества примет вид

$$\delta S_м = \frac{1}{c}\int d^4x \left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{in}}\delta_L\varphi_{in} + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\varphi_A}\delta_L\varphi_A - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}t_м^{in}\delta_L\gamma_{in} + \mathrm{Div}\right) = 0, \quad (32.8)$$

где введено обозначение для симметрического тензора энергии-импульса вещества в псевдоевклидовом пространстве-времени:

$$t_м^{in} = -2\frac{\Delta\mathfrak{L}_м}{\Delta\gamma_{in}} = -2\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\gamma_{in}} - \gamma^{ip}\gamma^{ns}\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\gamma^{ps}}\right).$$

Так как вариации Ли ГП φ_{in} и метрики имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_L\varphi_{in} &= -\varphi_{il}D_n\xi^l - \varphi_{nl}D_i\xi^l - \xi^l D_l\varphi_{in}; \\ \delta_L\gamma_{in} &= -\gamma_{il}D_n\xi^l - \gamma_{nl}D_i\xi^l, \end{aligned} \quad (32.9)$$

то после подстановки (32.6) и (32.9) в (32.8) найдем

$$\delta S_м = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\xi^l\left[2D_n\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{nm}}\varphi_{ml}\right) - D_n t_{мl}^n - \frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{nm}}D_l\varphi_{nm} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - D_n\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_A}F_{A;\,l}^{B;\,n}\varphi_B\right) - \frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_A}D_l\varphi_A\right] + \mathrm{Div}\right) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности вектора ξ^l и его производных получим еще один сильный закон сохранения

$$D_n t_{мl}^n - 2D_n\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{nm}}\varphi_{ml}\right) + \frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{nm}}D_l\varphi_{nm} +$$
$$+ D_n\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_A}F_{A;\,l}^{B;\,n}\varphi_B\right) + \frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_A}D_l\varphi_A = 0. \quad (32.10)$$

Вычитая из этого равенства выражение (32.7), имеем

$$D_n t_{мl}^n - 2D_n\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{nm}}\varphi_{ml}\right) + \frac{\delta\mathfrak{L}_м}{\delta\varphi_{nm}}D_l\varphi_{nm} = g_{il}\nabla_n T^{in}. \quad (32.11)$$

Это тождество справедливо независимо от выполнения уравнения движения вещества и гравитационного поля, а поэтому оно является сильным законом сохранения.

Аналогичным образом из инвариантности функции действия гравитационного поля при преобразовании (32.3), получим

$$D_n t^n_{gl} - 2D_n\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \varphi_{lm}}\varphi_{ml}\right) + \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \varphi_{mn}} D_l \varphi_{mn} = 0, \qquad (32.12)$$

где для плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени t^n_{gl} имеем, как обычно

$$t^{in}_g = -2\frac{\Delta \mathfrak{L}_g}{\Delta \gamma_{in}} = -2\left[\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \gamma_{in}} - \gamma^{ip}\gamma^{ns}\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \gamma^{sp}}\right],$$

причем $t^n_{gl} = \gamma_{il} t^{in}_g$.

Из соотношений (32.11) и (32.12) следует, что

$$D_n[t^n_{gl} + t^n_{\text{м}l}] - 2D_n\left[\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi_{nm}}\varphi_{ml}\right] + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi_{mn}} D_l \varphi_{mn} = \nabla_n (g_{il} T^{in}). \qquad (32.13)$$

При условии выполнения уравнений гравитационного поля

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi_{mn}} = \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \varphi_{mn}} + \frac{\delta \mathfrak{L}_\text{м}}{\delta \varphi_{mn}} = 0, \qquad (32.14)$$

где

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi_{mn}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_{mn}} - \partial_p\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_p \varphi_{mn})}\right) + \partial_p \partial_q\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_p \partial_q \varphi_{mn})}\right) - \\ - \partial_p \partial_q \partial_l\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_p \partial_q \partial_e \varphi_{mn})}\right), \qquad (32.15)$$

выражение (32.13) упрощается:

$$D_n[t^n_{gl} + t^n_{\text{м}l}] = g_{il}\nabla_n T^{in}. \qquad (32.16)$$

Это равенство является проявлением принципа геометризации. Из него следует, что ковариантная дивергенция в псевдоевклидовом пространстве-времени от суммы плотностей тензоров энергии-импульса гравитационного поля и вещества преобразовалась в ковариантную дивергенцию в римановом пространстве-времени от плотности тензора энергии-импульса вещества, определенного в эффективном римановом пространстве. Таким образом, в полевом подходе гравитационное поле (как физическое поле) при описании движения вещества может быть исключено и его энергия, образно говоря, идет на формирование эффективного риманова пространства-времени.

Риманово пространство-время при таком подходе является своеобразным носителем энергии-импульса. В соответствии с принципом геометризации и законами сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых на создание риманова пространства-времени затрачивается столько энергии, сколько ее содержится в гравитационном поле, а поэтому распространение волн кривизны в римановом пространстве-времени отражает обычный перенос энергии гравитационными волнами в псевдоевклидовом пространстве-времени. Это означает, что в полевом подходе волны кривизны в эффективном римановом пространстве-времени являются прямым следствием существования гравитационных волн в духе Фарадея—Максвелла, обладающих плотностью энергии-импульса.

При условии выполнения уравнений движения вещества

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} = 0 \tag{32.17}$$

выражение (32.10) упрощается:

$$D_n t^n_{\text{м}l} - 2D_n\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_{mn}} \varphi_{ml}\right) + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_{mn}} D_l \varphi_{mn} = 0, \tag{32.18}$$

а из соотношения (32.7) автоматически следует ковариантное уравнение сохранения плотности тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве-времени

$$\nabla_n T^{in} = \partial_n T^{in} + \Gamma^i_{mn} T^{mn} = 0. \tag{32.19}$$

Это уравнение является общим для теорий с геометризованной плотностью лагранжиана вещества и не связано с каким-либо конкретным вариантом теории гравитации.

Далее мы видим, что из соотношений (32.13) и (32.19) при условии выполнения уравнений гравитационного поля (32.14) следует ковариантный закон сохранения для плотностей полного симметрического тензора энергии-импульса в псевдоевклидовом пространстве-времени

$$D_n (t^n_{gl} + t^n_{\text{м}l}) = 0. \tag{32.20}$$

Выражение (32.20) в соединении со свойствами однородности и изотропности псевдоевклидова пространства-времени дает возможность построить для замкнутой системы все интегральные сохраняющиеся величины. Это означает, что в данной схеме отсутствуют какие-либо процессы (независимо от эрудиции их изобретателя), идущие с несохранением энергии-импульса.

Из выражения (32.20) следует также, что гравитационное поле, рассматриваемое в псевдоевклидовом пространстве-времени, ведет себя аналогично всем другим физическим полям. Оно обладает энергией и импульсом и вносит вклад в плотность полного тензора энергии-импульса системы.

На основании (32.20) и тождества (32.16) получим

$$D_n (t^n_{gl} + t^n_{\text{м}l}) = g_{il} \nabla_n T^{in} = 0. \qquad (32.21)$$

Следовательно, закон сохранения для плотности полного тензора энергии-импульса (32.20) и закон сохранения в форме (32.19) при выполнении уравнений движения вещества (32.17) и гравитационного поля (32.14) представляют собой просто различные формы записи одного и того же закона сохранения. Закон сохранения (32.20) выражает тот факт, что в псевдоевклидовом пространстве-времени сохраняется плотность полного тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Этот закон имеет обычный вид закона сохранения. Закон сохранения в римановом пространстве-времени не является законом сохранения в обычном понимании, так как плотность тензора энергии-импульса вещества T^{in} не должна сохраняться, поскольку $\partial_n T^{in} \neq 0$. В этом случае второе слагаемое в (32.19) выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на материю и показывает, что материя получает энергию как бы «запасенную» в эффективном римановом пространстве. Но какая величина при этом сохраняется, из выражения (32.19) не видно, и только установленное нами равенство (32.16) позволяет установить, что сохраняется полный тензор энергии-импульса системы. До сих пор мы не конкретизировали выбор плотности лагранжиана. В рамках специальной теории относительности, используя представление о гравитационном поле, как поле Фарадея—Максвелла, обладающем энергией, импульсом и спинами 2 и 0, на основе принципа геометризации в работах [28—30] однозначно построена релятивистская теория гравитации (РТГ). Эта теория принципиально отличается от общей теории относительности Эйнштейна, она позволяет описать всю имеющуюся к настоящему времени совокупность гравитационных экспериментов, удовлетворяет принципу соответствия и не содержит трудностей с проблемой энергии-импульса, которые присущи общей теории относительности. Согласно этой теории фридманова Вселенная бесконечная и «плоская». Отсюда следует, что во Вселенной должна существовать «скрытая масса» в какой-либо форме материи. В РТГ процесс сжатия массивного тела гравитационными силами останавливается при конечной плотности вещества за конечный промежуток собственного времени. Яркость такого объекта экспоненциально уменьшается, однако ничего необычного с объектом не происходит, ибо его плотность всегда конечна и, например, для массы тела, равной 10^8 масс Солнца, она равна 2 г/см^3. Это означает, что в РТГ отсутствуют «черные дыры», как объекты, в которых плотность бесконечно возрастает и которые сжимаются в точку.

Отсутствие законов сохранения присуще всему подклассу теорий гравитации с полной геометризацией, а не только теории Эйнштейна. В теориях с полной геометризацией плотность лагранжиана зависит от поля φ_{ik} и метрического тензора γ_{ik} только через метрический тензор риманова пространства-времени

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g(g_{ik}) + \mathfrak{L}_M(g_{ik}, \varphi_A). \tag{32.22}$$

В теориях этого подкласса для плотности симметрического тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени имеем выражение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} t^{in} &= \frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta \gamma_{in}} = \frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} \frac{\partial g_{ln}}{\partial \gamma_{in}} - \\ &- \partial_p \left[\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} \frac{\partial g_{lm}}{\partial (\partial_p \gamma_{in})} - \partial_q \left(\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} \frac{\partial g_{lm}}{\partial (\partial_{pq} \gamma_{in})} \right) \right] - \gamma^{is} \gamma^{np} \left(\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} \frac{\partial g_{lm}}{\partial \gamma^{sp}} - \right. \\ &\left. - \partial_q \left[\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} \frac{\partial g_{lm}}{\partial (\partial_q \gamma^{sp})} - \partial_k \left(\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} \frac{\partial g_{lm}}{\partial (\partial_{kq} \gamma^{sp})} \right) \right] \right). \end{aligned} \tag{32.23}$$

Поскольку в любой теории гравитации с плотностью лагранжиана (32.22) уравнения гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta g_{lm}} = \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{lm}} - g^{lp} g^{ms} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{sp}} = 0, \tag{32.24}$$

то плотность симметрического тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени (32.23) в силу уравнений гравитационного поля (32.24) обращается в нуль:

$$\frac{\Delta \mathfrak{L}}{\Delta \gamma_{in}} = -\frac{1}{2} t^{in} = 0.$$

Таким образом, подкласс теорий гравитации с лагранжианом (32.22) в принципе не позволяет ввести понятие гравитационного поля, обладающего энергией и импульсом. Это утверждение носит характер теоремы, следствием которой является вывод, что любой путь построения теории тяготения на базе плоского пространства-времени с полной геометризацией, исходящей из представлений о гравитационном поле как о физическом поле, тензор энергии-импульса которого отличен от нуля, в принципе не может привести к общей теории относительности. Этот общий вывод доказывает ошибочность утверждений ряда авторов [32—33] о неизбежности сведения всех таких теорий к общей теории относительности Эйнштейна. Подробный анализ [31, 37, 44] показывает, что в общей теории относительности отсутствуют законы сохранения материи для замкнутой системы. Итак, чтобы имели место законы сохранения, необходимо отказаться от полной геометризации гравитационного поля, причем уравнения его могут быть нелинейными и при старших производных.

Тогда в полном соответствии с принципом геометризации в плотность лагранжиана вещества поле φ^{ik} и метрический тензор пространства Минковского γ^{ik} будут входить только через величину g^{ik}, а в плотность лагранжиана гравитационного поля они будут входить отдельно.

В ОТО характеристикой гравитационного поля является метрический тензор g^{ik}, на который и накладывают граничные условия поведения на бесконечности, не понимая того обстоятельства, что асимптотика метрических коэффициентов зависит от произвола в способе выбора трехмерной (пространственной) системы координат в данной системе отсчета. Последнее с необходимостью ведет к тому, что величины g^{ik} не могут быть характеристиками гравитационного поля типа Фарадея—Максвелла, обладающего энергией и импульсом. Поэтому при построении релятивистской теории гравитации мы должны отказаться от идеи Эйнштейна—отождествлять гравитационное поле с метрикой риманова пространства-времени.

Глава III

Релятивистская теория гравитации

Настоящая глава посвящена изложению основ релятивистской теории гравитации (РТГ), построенной нами в работах [28—30]. Но прежде чем перейти к изложению основ РТГ, мы коротко остановимся на обсуждении некоторых принципиальных положений, связанных с общей теорией относительности (ОТО).

При создании общей теории относительности Эйнштейн исходил из принципа эквивалентности сил инерции и тяготения. Принцип эквивалентности сил сформулирован им следующим образом [8]: «Для бесконечно малой области координаты всегда можно выбрать таким образом, что гравитационное поле будет отсутствовать в ней». В формулировке принципа эквивалентности Эйнштейн уже отошел от представления гравитационного поля как поля Фарадея—Максвелла. В дальнейшем это нашло отражение во введенной им псевдотензорной характеристике гравитационного поля τ_p^l. Позднее Шредингер в работе [35] показал, что при соответствующем выборе системы координат все компоненты псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля τ_p^l вне шара обращаются в нуль. Эйнштейн по этому поводу писал [8]: «Что же касается соображений Шредингера, то их убедительность заключается в аналогии с электродинамикой, в которой напряжения и плотность энергии любого поля отличны от нуля. Однако я не могу найти причину, почему так же должно обстоять дело и для гравитационных полей. Гравитационные поля можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии». Отсюда видно, что Эйнштейн сознательно отошел от концепции гравитационного поля как физического поля Фарадея — Максвелла, так как это поле, как материальную субстанцию, никогда нельзя устранить выбором системы отсчета.

Поскольку в ОТО отсутствует понятие плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля, то в ней нельзя ввести закон сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Именно Гильберт первый подчеркнул это обстоятельство. Он писал [36]: «Я утверждаю, ... что для общей теории относительности, т. е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции уравнений энергии, которые... соответствуют уравнениям энергии в ортогонально инвариантных теориях, вообще не существует. Я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности». Некоторые авторы не понимают этого до сих пор, другие понимают и рассматривают это как важнейший принципиальный шаг, который сделала ОТО, низвергнув такие понятия, как энергия. Отказ от понятий плотности энергии-импульса гравитационного поля приводит в ОТО к невозможности локализации энергии гравитационного поля. Но отсутствие локализации энергии поля и законов сохранения ведет к отсутствию понятия гравитационных волн и потока гравитационного излучения. Это значит, что перенос гравитационной энергии в пространстве от одного тела к другому невозможен.

Согласно идеологии ОТО принцип относительности неприменим для гравитационных явлений. Именно в этом центральном пункте почти семьдесят лет назад Эйнштейн и Гильберт совершили при построении ОТО принципиальный отход от специальной теории относительности, который и привел к отказу от законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также к возникновению нефизических понятий о нелокализуемости гравитационной энергии и многому другому, что не имеет отношения к гравитации. Эти два великих ученых покинули удивительной простоты пространство Минковского, обладающее максимальной (десятипараметрической) группой движения пространства и вошли в дебри римановой геометрии, которые затянули последующие поколения физиков, занимающихся гравитацией.

Итак, приняв ОТО, мы должны отказаться как от фундаментального принципа — закона сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля, так и от концепции классического поля. Но это очень большая потеря, и мы были бы слишком легкомысленны, если бы без должных экспериментальных оснований согласились на нее. Отсюда один выход—отказаться от ОТО.

В работах [31, 37—41] было показано, что поскольку ОТО не имеет и не может иметь законов сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых, инертная масса, определенная в теории Эйнштейна, не имеет физического смысла, а поток гравитационного излучения, как он определен в ОТО, всегда может быть уничтожен соответствующим выбором допустимой системы отсчета, и, следовательно, квадрупольная формула Эйнштейна для излучения гравитационного поля не является следствием ОТО. Из общей теории относительности в принципе не следует, что двойная система теряет энергию из-за гравитационного излучения. ОТО не имеет классического ньютоновского предела, а следовательно, она не удовлетворяет одному из наиболее фундаментальных принципов физики—принципу соответствия. Вот к чему приводит отсутствие в ОТО законов сохранения энергии-импульса, если отказаться от догматизма, серьезно вдуматься в существо проблемы и провести детальный физический анализ.

Все это свидетельствует о том, что общая теория относительности не является удовлетворительной физической теорией, поэтому задача построения классической теории гравитации, которая удовлетворяла бы всем требованиям, предъявляемым к физической теории, является насущной проблемой.

В основе нашей теории, в противоположность ОТО, лежит принцип относительности, который был выдвинут Анри Пуанкаре как всеобщий принцип для всех физических процессов и формулирован следующим образом [42]: «Законы физических явлений будут одинаковыми как для покоящегося наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося в состоянии равномерного поступательного движения, так что мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить, находимся ли мы в таком движении или нет».

В такой формулировке, казалось бы, принцип относительности нельзя применить к ускоренным системам отсчета. Более того, Эйнштейн утверждал, что в этом случае обязательно необходимо перейти к ОТО. Однако это неправильно. Как показано в работе [43], открытие Минковским псевдоевклидовой геометрии пространства-времени позволяет сформулировать обобщенный принцип относительности: «Какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся». Это означает, что при описании физических явлений в пространстве Минковского, в зависимости от физической задачи, мы можем выбрать любую подходящую систему отсчета, адекватную данной задаче, а следовательно, и задать соответствующий метрический тензор γ_{ip} пространства Минковского. Почему Эйнштейн не понял этого? По-видимому, это объясняется тем, что теорию относительности он воспринимал только через постулат о постоянстве скорости света в галилеевых координатах, а ускоренные системы отсчета на основании принципа эквивалентности отождествлял с гравитацией.

В основе нашей теории лежит представление о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея — Максвелла, обладающем энергией-импульсом. Таким образом, гравитационное поле, аналогично всем другим физическим полям, характеризуется своим тензором энергии-импульса системы. Гравитационное поле мы рассматриваем как физическое поле со спином 2 и 0, причем асимптотически свободное гравитационное поле имеет спин 2. Геометрия пространства-времени для всех физических полей является псевдоевклидовой (пространство Минковского).

Таким образом, законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для замкнутой системы строго выполняются. В этом состоит еще одно принципиальное отличие нашей теории от ОТО Эйнштейна.

Другим важнейшим вопросом, возникающим при построении теории гравитации, является вопрос о взаимодействии гравитационного поля с веществом. Гравитационное поле, как мы сейчас представляем, является универсальным: оно действует на все виды вещества одинаково. В основу теории положим принцип геометризации [43, 44], согласно которому уравнения движения вещества под действием тензорного гравитационного поля φ^{ik} в пространстве Минковского с метрическим тензором γ^{ik} могут быть тождественно представлены как уравнения движения вещества в эффективном римановом пространстве-времени с метрическим тензором g^{ik}, зависящим от гравитационного поля φ^{ik} и метрического тензора γ^{ik}. Тем самым мы вводим представление об эффективном римановом пространстве полевой природы. Это силовое пространство создается в РТГ со строгим соблюдением законов сохранения и возникает из-за наличия гравитационного поля и определенного, универсального характера его действия на вещество. Кривизна этого динамического риманова пространства, как вторичное понятие, возникает в силу принципа геометризации и является следствием действия гравитационного поля.

На основании пространства Минковского и принципа геометризации плотность лагранжиана можно представить в виде

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_g(\tilde{\gamma}^{ik}, \tilde{\varphi}^{ik})+\mathfrak{L}_M(\tilde{g}^{ik}, \varphi_A), \tag{A}$$

где $\tilde{\varphi}^{ik}=\sqrt{-\gamma}\,\varphi^{ik}$ — плотность тензора полевой переменной гравитационного поля φ^{ik}; $\tilde{g}^{ik}=\sqrt{-g}\,g^{ik}$ — плотность метрического тензора риманова пространства g^{ik}; $\tilde{\gamma}^{ik}=$ $=\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ik}$ — плотность метрического тензора пространства Минковского, а φ_A — поля вещества.

В данной теории плотность лагранжиана гравитационного поля $\mathfrak{L}_g$ зависит от метрического тензора γ^{ik} и гравитационного поля φ^{ik}, поэтому она принципиально отличается от ОТО, где плотность лагранжиана зависит только от метрического тензора риманова пространства g^{ik}. Таким образом, плотность лагранжиана гравитационного поля в нашей теории не полностью геометризована, тогда как в ОТО она полностью геометризована.

Как будет показано далее, представление о гравитационном поле, обладающем плотностью энергии-импульса и спином 2 и 0, в соединении с принципом геометризации позволяет однозначно построить релятивистскую теорию гравитации. Такая теория изменяет сложившиеся под влиянием ОТО представления о пространстве-времени, выводит нас из дебрей римановой геометрии и по духу соответствует современным теориям в физике элементарных частиц. Как следствие данной теории, общий принцип относительности Эйнштейна лишен физического смысла и не имеет никакого содержания [9].

§ 33. Инертная масса в общей теории относительности

Равенство инертной и гравитационной масс одного и того же тела Эйнштейн рассматривал как точный закон природы, который должен найти отражение в его теории. В настоящее время принято считать доказанным, что в общей теории относительности гравитационная масса (или, как ее иногда называют, тяжелая масса) системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, равна ее инертной массе. Такое, например, утверждение содержится в работах Эйнштейна [8], Толмена [48] и Вейля [49]. Впоследствии «доказательство» этой теоремы с различными видоизменениями было проведено и рядом других авторов [14, 32, 47].

Однако этот вывод является неправильным. Следуя работам [31, 34], покажем, в чем состоит его ошибочность.

Тяжелая масса M произвольной физической системы, покоящейся как целое относительно галилеевской на бесконечности шварцшильдовской системы координат, определялась Эйнштейном [8] как величина, стоящая множителем при члене $-2G/(c^2r)$ в асимптотическом выражении ($r \longrightarrow \infty$) для компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени

$$g_{00} = 1 - \frac{2G}{c^2 r} M.$$

Несколько иное определение гравитационной массы дал Толмен [48]:

$$M = \frac{c^2}{4\pi G} \int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV. \tag{33.1}$$

Из этих определений непосредственно следует, что величина гравитационной массы при преобразованиях трехмерных координат не изменяется, поскольку как компонента R_0^0 тензора Риччи, так и компонента g_{00}

метрического тензора в данном случае преобразуются аналогично скалярам.

Эти определения в случае статического сферически симметричного источника являются эквивалентными. Покажем теперь, что они эквивалентны и для любых статических систем. Чтобы в этом убедиться, запишем компоненту R_0^0 в виде

$$R_0^0 = g^{0i}\left[\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{0i}^l - \frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma_{pi}^p + \Gamma_{0i}^n\Gamma_{np}^p - \Gamma_{pi}^n\Gamma_{n0}^p\right].$$

После тождественных преобразований из этого выражения получим

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\sqrt{-g}\,g^{0n}\Gamma_{0n}^\alpha\right] - g^{0i}\frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma_{ni}^n - \\ - \frac{1}{2}\Gamma_{ni}^0\frac{\partial g^{ni}}{\partial x^0} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\sqrt{-g}\,g^{0n}\Gamma_{0n}^0\right]. \qquad (33.2)$$

Поскольку для статических систем последними тремя членами можно пренебречь, то из выражения (33.1) имеем

$$M = \frac{c^2}{4\pi G}\oint \sqrt{-g}\,g^{0n}\Gamma_{0n}^\alpha\,dS_\alpha. \qquad (33.3)$$

Так как достаточно далеко от статической системы ее метрика с заданной точностью может быть описана метрикой Шварцшильда, то выражение (33.3) принимает вид

$$M = -\frac{c^2}{8\pi G}\lim_{r\to\infty}\oint g^{00}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\,dS^\alpha. \qquad (33.4)$$

Поскольку подынтегральное выражение в соотношении (33.1) является скаляром при любых преобразованиях трехмерной системы координат, то и величина гравитационной массы M не будет зависеть от выбора координат. В шварцшильдовских координатах из выражения (33.4) имеем

$$M = \frac{c^2}{2G}\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial g_{00}}{\partial r}\right) = \frac{c^2}{2G}\lim_{r\to\infty}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{2G}{c^2 r}M\right)\right].$$

Таким образом, гравитационная масса любой статической системы, согласно определению Толмена, является множителем при члене $-2G/(c^2 r)$ в асимптотическом выражении для компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени. Следовательно, определения тяжелой массы, данные Эйнштейном и Толменом, для статических систем совпадают.

Понятие инертной массы физической системы в общей теории относительности Эйнштейн тесно связывал с понятием энергии этой системы [8]: «... величина, которую мы интерпретировали как энергию, играет роль также инертной массы, в соответствии со специальной теорией относительности». Поскольку в общей теории относительности расчет энергии системы Эйнштейн предложил проводить с использованием псевдотензоров энергии-импульса, то и вычисление инертной массы осуществляется на основе выражения

$$m_i=\frac{1}{c}P^0=\frac{1}{c^2}\int(-g)\left[T^{00}+\tau^{00}\right]dV=\frac{1}{c^2}\oint h^{00\alpha}dS_\alpha.$$

Определим в соответствии с этим соотношением инертную массу сферически симметричного источника гравитационного поля и изучим ее трансформационные свойства при преобразованиях координат.

В изотропных декартовых координатах метрика риманова пространства-времени имеет вид

$$g_{00}=\frac{\left(1-\frac{r_g}{4r}\right)^2}{\left(1+\frac{r_g}{4r}\right)^2};\quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}\left(1+\frac{r_g}{4r}\right)^4. \tag{33.5}$$

Здесь

$$r_g=\frac{2G}{c^2}M.$$

Эти координаты являются асимптотически галилеевскими, поскольку при $r\to\infty$ справедливы оценки

$$g_{00}=1+O\left(\frac{1}{r}\right);\quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \tag{33.6}$$

Используя ковариантные компоненты метрики (33.5), из выражения

$$h^{ikl}=\frac{c^4}{16\pi G}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[-g\left(g^{ik}g^{ml}-g^{il}g^{mk}\right)\right]$$

имеем

$$h^{00\alpha} = -\frac{c^4}{16\pi G} \frac{\partial}{\partial x^\beta} [g_{11} g_{22} g_{33} g^{\alpha\beta}].$$

Подставляя это выражение в соотношение

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{0i\alpha} \, dS_\alpha = \text{const}, \tag{33.7}$$

учитывая, что

$$dS_\alpha = -\frac{x_\alpha}{r} r^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi,$$

и проводя интегрирование по бесконечно удаленной поверхности, получим

$$P^0 = \frac{c^3}{16\pi G} \lim_{r \to \infty} r^2 \int \frac{x_\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial x^\beta} [-g_{11} g_{22} g_{33} g^{\alpha\beta}] \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi. \tag{33.8}$$

Таким образом, компонента P^0 не зависит от компоненты g_{00} метрического тензора риманова пространства-времени. Из выражений (33.5) и (33.8) с учетом соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} f(r) = -\frac{x_\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r), \tag{33.9}$$

где

$$x_\alpha x^\alpha = -r^2,$$

для компоненты P^0 «энергии-импульса» системы имеем

$$P^0 = \frac{c^3 r_g}{2G} = Mc. \tag{33.10}$$

Именно это совпадение «инертной массы» с тяжелой массой давало основание для утверждения об их равенстве в общей теории относительности [47]: «... $P^\alpha = 0$, $P^0 = Mc$ — результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжелой» и «инертной» масс («тяжелой» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле, — это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона: «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой массе, умноженной на c^2)».

Однако такое утверждение Эйнштейна [8] и других авторов [14, 32, 46—48] является неправильным. Как легко убедиться, «энергия» системы, а следовательно, и ее «инертная масса» не имеют никакого физического смысла, поскольку их величина зависит даже от выбора трехмерной системы координат.

Действительно, элементарным требованием, которому должно удовлетворять определение инертной массы, является условие независимости ее величины от выбора трехмерной системы координат, что имеет место в любой физической теории. Однако в общей теории относительности определение «инертной массы» этому требованию не удовлетворяет.

Покажем, например, что в случае решения Шварцшильда величина «инертной массы» может принимать любые значения, в зависимости от выбора системы пространственных координат. Для этого совершим переход от трехмерных декартовых координат $x_{\text{с}}^{\alpha}$ к другим координатам $x_{\text{н}}^{\alpha}$, связанным со старыми координатами соотношением

$$x_{\text{с}}^{\alpha}=x_{\text{н}}^{\alpha}\left[1+f(r_{\text{н}})\right], \tag{33.11}$$

где

$$r_{\text{н}}=\sqrt{x_{\text{н}}^2+y_{\text{н}}^2+z_{\text{н}}^2},$$

а $f(r_{\text{н}})$ — произвольная несингулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$f(r_{\text{н}})\geqslant 0; \qquad \lim_{r_{\text{н}}\to\infty} f(r_{\text{н}})=0; \qquad \lim_{r_{\text{н}}\to\infty} r_{\text{н}}\frac{\partial}{\partial r_{\text{н}}}f(r_{\text{н}})=0. \tag{33.12}$$

Легко убедиться, что преобразование (33.11) соответствует изменению арифметизации точек трехмерного пространства вдоль радиуса

$$r_{\text{с}}=r_{\text{н}}\left[1+f(r_{\text{н}})\right].$$

Чтобы преобразование (33.11) имело обратное и являлось взаимно однозначным, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial r_{\text{с}}}{\partial r_{\text{н}}}=1+f+r_{\text{н}}f'>0,$$

где

$$f' = \frac{\partial}{\partial r_\text{н}} f(r_\text{н}).$$

Тогда якобиан преобразования будет отличен от нуля

$$J = \det \left\| \frac{\partial x_\text{с}}{\partial x_\text{н}} \right\| = (1+f)^2 \frac{\partial r_\text{с}}{\partial r_\text{н}} \neq 0.$$

В частности, всем поставленным требованиям удовлетворяет функция

$$f(r_\text{н}) = \alpha^2 \sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_\text{н}}}\,[1 - \exp(-\varepsilon^2 r_\text{н})], \qquad (33.13)$$

где α и ε — произвольные числа, отличные от нуля.

Поскольку в данном случае

$$\frac{\partial r_\text{с}}{\partial r_\text{н}} = 1 + \alpha^2 \sqrt{\frac{8GM}{c^2 r_\text{н}}} \left[\frac{1}{2} + \left(\varepsilon^2 r_\text{н} - \frac{1}{2} \right) \exp(-\varepsilon^2 r_\text{н}) \right],$$

то $r_\text{с}$ является монотонной функцией от $r_\text{н}$. Легко убедиться, что $f(r_\text{н})$ является неотрицательной, несингулярной функцией во всем пространстве. Якобиан преобразования в этом случае строго больше единицы

$$J = (1+f)^2 \frac{\partial r_\text{с}}{\partial r_\text{н}} > 1.$$

Поэтому преобразование (33.11) с функцией $f(r_\text{н})$, определенной выражением (33.13), имеет обратное преобразование и является взаимно однозначным.

Очевидно, что при преобразовании (33.11) величина гравитационной массы (33.1) не изменяется. Вычислим теперь величину «инертной массы» в новых координатах $x^\alpha_\text{н}$. Используя закон преобразования метрического тензора

$$g^\text{н}_{ni} = \frac{\partial x^l_\text{с}}{\partial x^n_\text{н}} \frac{\partial x^m_\text{с}}{\partial x^i_\text{н}} g^\text{с}_{ml}(x_\text{с}(x_\text{н})), \qquad (33.14)$$

найдем компоненты метрики Шварцшильда (33.5) в новых координатах. В результате получим

$$g_{00}=\left[1-\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^2\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^{-2};$$

$$g_{\alpha\beta}=\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^4\left\{-\delta_{\alpha\beta}(1+f)^2-\right.$$
$$\left.-x^н_\alpha x^н_\beta\left[(f')^2+\frac{2}{r_н}f'(1+f)\right]\right\}. \quad (33.15)$$

Определитель метрического тензора (33.15) равен

$$g=-g_{00}\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^{12}(1+f)^4\times$$
$$\times\left[(1+f)^2+r_н^2(f')^2+2r_нf'(1+f)\right]. \quad (33.16)$$

Следует особо отметить, что метрика (33.15) является асимптотически галилеевой

$$\lim_{r_н\to\infty} g_{00}=1;\qquad \lim_{r_н\to\infty} g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}.$$

В частном случае, когда функция f задана соотношением (33.13) и $r_н\longrightarrow\infty$, метрика риманова пространства-времени будет иметь следующую асимптотику:

$$g_{00}\simeq 1+O\left(\frac{1}{r_н}\right);\quad g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}+O\left(\frac{1}{\sqrt{r_н}}\right). \quad (33.17)$$

Для контравариантных компонент метрики (33.15) имеем

$$g^{00}=\frac{1}{g_{00}};\quad g^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}A+x^\alpha_н x^\beta_н B, \quad (33.18)$$

где введены обозначения

$$A=(1+f)^{-2}\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^{-4};$$

$$B=\frac{r_н(f')^2+2f'(1+f)}{r_н\left[1+\frac{r_g}{4r_н(1+f)}\right]^4(1+f)^2\left[(1+f)^2+r_н^2(f')^2+2r_нf'(1+f)\right]}.$$

Подставляя выражения (33.16) и (33.18) в соотношение (33.8), получим

$$P^0 = \frac{c}{16\pi G} \lim_{r_н \to \infty} r_н^2 \int \frac{x_\alpha^н}{r_н} \frac{\partial}{\partial x_н^\beta} \Big\{ -\delta^{\alpha\beta}(1+f)^2 \Big[1 + \frac{r_g}{4r_н(1+f)} \Big]^8 [(1+f)^2 + r_н^2 (f')^2 + 2r_н f'(1+f)] + \frac{x_н^\alpha x_н^\beta}{r_н^2}(1+f)^2 \Big[1 + \frac{r_g}{4r_н(1+f)} \Big]^8 [r_н^2 (f')^2 + 2r_н f'(1+f)] \Big\} dV.$$

В силу соотношений (33.9) имеем

$$P^0 = \frac{c^3}{2G} \lim_{r_н \to \infty} \Big\{ r_н^3 (f')^2 (1+f)^2 \Big[1 + \frac{r_g}{4r_н(1+f)} \Big]^8 + r_g (1+f)^2 (1+f+r_н f') \Big[1 + \frac{r_g}{4r_н(1+f)} \Big]^7 \Big\}. \quad (33.19)$$

Учитывая асимптотическое выражение (33.12) для f, получим окончательно

$$P^0 = \frac{c^3}{2G} \lim_{r_н \to \infty} \{ r_g + r_н^3 (f')^2 \}. \quad (33.20)$$

Таким образом, величина «инертной массы» существенно зависит от скорости стремления f' к нулю при $r_н \to \infty$. В частности, выбирая функцию $f(r_н)$ в виде (33.13), из выражения (33.20) имеем

$$m = M(1+\alpha^4). \quad (33.21)$$

Отсюда следует, что для «инертной массы» системы, состоящей из вещества и гравитационного поля, в общей теории относительности мы можем получить, ввиду произвольности величины α, любое наперед заданное число $m \geqslant M$ в зависимости от выбора пространственных координат, хотя гравитационная (33.1) масса M этой системы, а следовательно, и все три эффекта общей теории относительности останутся при этом неизменными. Отметим также, что при более сложных преобразованиях пространственных координат, оставляющих метрику асимптотически галилеевой, «инертная масса» системы может принимать любые наперед заданные значения, как положительные, так и отрицательные.

Таким образом, мы видим, что в общей теории относительности величина «инертной массы», впервые введенная

Эйнштейном и заимствованная впоследствии многими авторами [14, 32, 46—48], зависит от выбора трехмерной системы координат, а поэтому она не имеет никакого физического смысла. Следовательно, и утверждения о равенстве «инертной» и «тяжелой» масс в теории Эйнштейна также не имеют никакого физического смысла. Это равенство имеет место в узком классе трехмерных систем координат, а так как «инертная» и гравитационная (33.1) массы имеют различные трансформационные законы, то при переходе к другим трехмерным системам координат их равенство уже не выполняется.

Кроме того, это определение «инертной массы» в общей теории относительности не удовлетворяет принципу соответствия с теорией Ньютона. Действительно, ввиду того, что «инертная масса» m в теории Эйнштейна зависит от выбора трехмерной системы координат, то ее выражение в общем случае произвольной трехмерной системы координат не перейдет в соответствующее выражение теории Ньютона, в которой «инертная масса» не зависит от выбора пространственных координат. Таким образом, в общей теории относительности отсутствует классический ньютоновский предел, а следовательно, она не удовлетворяет и принципу соответствия.

В этой связи возникает вопрос: почему же до сих пор не была вскрыта бессмысленность определения

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{0i\alpha} \, dS_\alpha = \mathrm{const}$$

«энергии-импульса» системы и ее «инертной массы» в общей теории относительности?

Это можно объяснить только тем обстоятельством, что обычно все вычисления «энергии-импульса» и «инертной массы» проводились в некотором узком классе систем трехмерных координат, в котором совпадение «инертной» и гравитационной масс имеет место.

В этом же классе координатных систем выражение для «инертной массы» в ньютоновском приближении совпадает с соответствующим выражением теории Ньютона, что и создало иллюзию наличия классического предела в общей теории относительности. Подумать же о физическом смысле введенной «инертной массы» в общей теории относительности, по-видимому, считали излишним.

§ 34. Принцип геометризации и общие соотношения в релятивистской теории гравитационного поля

Не ограничивая общности, будем считать, что тензорная плотность метрического тензора риманова пространства-времени $\tilde{g}^{ik}$ является локальной функцией, зависящей от плотности метрического тензора пространства Минковского $\tilde{\gamma}^{ik}$ и плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\varphi}^{ik}$.

Плотность лагранжиана вещества $\mathfrak{L}_{\text{м}}$ будем считать зависящей только от полей φ_A, их ковариантных производных первого порядка, а также, в силу принципа геометризации, от плотности метрического тензора $\tilde{g}^{ik}$. Плотность лагранжиана гравитационного поля будем считать зависящей от плотности метрического тензора $\tilde{\gamma}^{ik}$, его частных производных первого порядка, а также от плотности гравитационного поля $\tilde{\varphi}^{ik}$ и его ковариантных производных первого порядка по метрике Минковского. Для получения законов сохранения мы воспользуемся инвариантностью действия при бесконечно малом смещении координат. Поскольку для любой заданной плотности лагранжиана $\mathfrak{L}$ действие

$$S=\int \mathfrak{L}\, d^4x$$

является скаляром, то при произвольном бесконечно малом преобразовании координат вариация δS будет равна нулю.

Вычислим сначала вариацию действия вещества

$$S_{\text{м}}=\int \mathfrak{L}_{\text{м}}\, d^4x$$

при преобразовании

$$x'^i=x^i+\xi^i(x), \tag{34.1}$$

где $\xi^i(x)$ — бесконечно малый 4-вектор смещения,

$$\delta S_{\text{м}}=\int d^4x\left[\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{mn}}\,\delta_{\text{L}}\tilde{g}^{mn}+\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A}\,\delta_{\text{L}}\,\varphi_A+\text{Div}\right]=0. \tag{34.2}$$

В (34.2) Div обозначает дивергентные члены, которые в данном разделе несущественны для нашего рассмотрения.

Эйлерова вариация определена, как обычно:

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \varphi} \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} - \partial_n \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n \varphi)} + \partial_n \partial_k \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_n \partial_k \varphi)} - \ldots$$

Вариации $\delta_L \tilde{g}^{mn}$, $\delta_L \varphi_A$ при преобразовании координат (34.1) легко вычисляются, если использовать их закон преобразования:

$$\delta_L \tilde{g}^{mn} = \tilde{g}^{kn} D_k \xi^m + \tilde{g}^{km} D_k \xi^n - D_k (\xi^k \tilde{g}^{mn}); \qquad (34.3)$$

$$\delta_L \varphi_A = -\xi^k D_k \varphi_A + F_{A;\,k}^{B;\,n} \varphi_B D_n \xi^k. \qquad (34.4)$$

Здесь и далее D_k — ковариантная производная по метрике Минковского. Подставляя эти выражения в (34.2) и интегрируя по частям, получим

$$\delta S_{\text{м}} = \int d^4x \left\{ -\xi^m \left[D_k \left(2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{mn}} \tilde{g}^{kn} \right) - D_m \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{lp}} \right) \tilde{g}^{lp} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + D_k \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F_{A;\,m}^{B;\,k} \varphi_B \right) + \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_m \varphi_A \right] + \mathrm{Div} \right\} = 0.$$

В силу произвольности вектора ξ^m из условия $\delta S_{\text{м}} = 0$ находим сильное тождество

$$D_k \left(2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{mn}} \tilde{g}^{kn} \right) - D_m \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{lp}} \right) \tilde{g}^{lp} =$$

$$= -D_k \left(\frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} F_{A;\,m}^{B;\,k} \varphi_B \right) - \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \varphi_A} D_m \varphi_A, \qquad (34.5)$$

справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей.

Введем обозначения

$$T_{mn} = 2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta g^{mn}}; \qquad T^{mn} = -2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta g_{mn}} = g^{mk} g^{lp} T_{kp}; \qquad (34.6\text{а})$$

$$\tilde{T}_{mn} = 2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}^{mn}}; \qquad \tilde{T}^{mn} = -2 \frac{\delta \mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta \tilde{g}_{mn}} = \tilde{g}^{mk} \tilde{g}^{np} \tilde{T}_{kp}. \qquad (34.6\text{б})$$

T_{mn} является плотностью тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве и называется плотностью тензора Гильберта.

Учитывая (34.6б), левую часть соотношения (34.5) можно представить в следующем виде:

$$D_k(\tilde{T}_{mn}\tilde{g}^{kn})-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}D_m\tilde{T}_{kp}=\partial_k(\tilde{T}_{mn}\tilde{g}^{kn})-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}\partial_m\tilde{T}_{kp}.$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_k(\tilde{T}_{mn}\tilde{g}^{kn})-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kp}\partial_m\tilde{T}_{kp}=\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right), \tag{34.7}$$

где $\tilde{T}=\tilde{g}_{kp}\tilde{T}^{kp}$, а ∇_k—ковариантная производная по метрике риманова пространства.

На основании (34.7) сильное тождество можно записать в виде

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right)=-D_k\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}F^{B;\,k}_{A;\,m}\varphi_B\right)-\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}D_m\varphi_A. \tag{34.8}$$

В силу принципа наименьшего действия уравнения движения для полей вещества имеют вид

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}=0. \tag{34.9}$$

Учитывая эти уравнения, из (34.8) найдем слабое тождество

$$\nabla_m\left(\tilde{T}^{mn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}\tilde{T}\right)=0. \tag{34.10}$$

Заметим, что плотность тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве T^{mn} связана с $\tilde{T}^{mn}$ соотношением

$$\sqrt{-g}\,T^{mn}=\tilde{T}^{mn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}\tilde{T}. \tag{34.11}$$

Поэтому из выражения (34.10) получаем ковариантное уравнение сохранения вещества в римановом пространстве

$$\nabla_m T^{mn}=0. \tag{34.12}$$

Если число уравнений для поля вещества равно четырем, то в этом и только в этом случае вместо уравнений для этого поля (34.9) всегда можно пользоваться эквивалентными уравнениями (34.12). Вариацию интеграла действия

(34.2) можно записать в эквивалентном виде

$$\delta S_{\text{м}}=\int d^4x\left\{\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}}\delta_{\text{L}}\tilde{\varphi}^{mn}+\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\gamma}^{mn}}\delta_{\text{L}}\tilde{\gamma}^{mn}+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}\delta_{\text{L}}\varphi_A+\text{Div}\right\}=0. \quad (34.13)$$

При этом вариации $\delta_{\text{L}}\tilde{\varphi}^{mn}$, $\delta_{\text{L}}\tilde{\gamma}^{mn}$ при преобразовании координат (34.1) равны

$$\delta_{\text{L}}\tilde{\varphi}^{mn}=\tilde{\varphi}^{kn}D_k\xi^m+\tilde{\varphi}^{km}D_k\xi^n-D_k(\xi^k\tilde{\varphi}^{mn}); \quad (34.14)$$
$$\delta_{\text{L}}\tilde{\gamma}^{mn}=\tilde{\gamma}^{kn}D_k\xi^m+\tilde{\gamma}^{km}D_k\xi^n-\tilde{\gamma}^{mn}D_k\xi^k. \quad (34.15)$$

Подставляя выражения для вариаций $\delta_{\text{L}}\tilde{\varphi}^{mn}$, $\delta_{\text{L}}\tilde{\gamma}^{mn}$, $\delta_{\text{L}}\varphi_A$ в (34.13) и интегрируя по частям, в силу произвольности ξ^m, получим сильное тождество

$$D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right)-D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp}+D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\gamma}^{mn}}\tilde{\gamma}^{kn}\right)-$$
$$-D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\gamma}^{kp}}\tilde{\gamma}^{kp}\right)=-D_k\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}F^{B;\,k}_{A;\,m}\varphi_B\right)-\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\varphi_A}D_m\varphi_A, \quad (34.16)$$

которое, как и (34.5), справедливо независимо от выполнения уравнений движения вещества и гравитационного поля.

Для любого лагранжиана введем некоторые обозначения и соотношения, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\tilde{t}^{mn}=-2\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\tilde{\gamma}_{mn}}; \quad t^{mn}=-2\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\gamma_{mn}}; \quad (34.17а)$$
$$t^{mn}=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\left(\tilde{t}^{mn}-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{mn}\tilde{t}\right). \quad (34.17б)$$

Так как $\mathfrak{L}_{\text{м}}$, в силу принципа геометризации зависит от $\tilde{\gamma}^{mn}$ только через $\tilde{g}^{mn}$, легко найти связь между $\tilde{t}_{\text{м}\,mn}$ и $\tilde{T}_{mn}$

$$t_{\text{м}\,mn}=2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\gamma}^{mn}}=\tilde{T}_{kp}\frac{\partial\tilde{g}^{kp}}{\partial\tilde{\gamma}^{mn}}. \quad (34.18а)$$

Здесь учтено определение (34.6б).

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial\tilde{g}^{kp}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}=-\tilde{\gamma}^{ml}\tilde{\gamma}^{nq}\frac{\partial\tilde{g}^{pk}}{\partial\tilde{\gamma}^{lq}},$$

на основании (34.17а) находим

$$\tilde{t}^{mn}_{\text{м}} = -\tilde{T}_{pk}\frac{\partial\tilde{g}^{pk}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}. \tag{34.18б}$$

Учитывая в (34.18б) тождество (34.6б), а также соотношение $-\tilde{g}_{lp}\tilde{g}_{qk}\dfrac{\partial\tilde{g}^{lq}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}} = \dfrac{\partial\tilde{g}_{pk}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}$, из (34.18б) получим

$$\tilde{t}^{mn}_{\text{м}} = \tilde{T}^{pk}\frac{\partial\tilde{g}_{pk}}{\partial\tilde{\gamma}_{mn}}. \tag{34.18в}$$

Теперь, сравнивая тождества (34.8) и (34.16), с учетом (34.17а), найдем

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right) = \tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}_{\text{м}} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}_{\text{м}}\right) + \\ + D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right) - D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp}. \tag{34.19}$$

Аналогичным образом из инвариантности действия гравитационного поля относительно преобразования координат (34.1) имеем

$$\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}_{g} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}_{g}\right) + D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}_{g}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right) - \\ - D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}_{g}}{\delta\tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp} = 0. \tag{34.20}$$

Складывая выражения (34.19) и (34.20), найдем

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right) = \tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn} - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}\right) + \\ + D_k\left(2\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}}\tilde{\varphi}^{kn}\right) - D_m\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\tilde{\varphi}^{kp}}\right)\tilde{\varphi}^{kp}. \tag{34.21}$$

Здесь и далее

$$\tilde{t}^{kn} = \tilde{t}^{kn}_{g} + \tilde{t}^{kn}_{\text{м}}. \tag{34.22}$$

Из принципа наименьшего действия уравнения для гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}} = \frac{\delta\mathfrak{L}_{g}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}} + \frac{\delta\mathfrak{L}_{\text{м}}}{\delta\tilde{\varphi}^{mn}} = 0 \tag{34.23}$$

Учитывая эти уравнения, из (34.21) получим важнейшее равенство

$$\tilde{g}_{mn}\nabla_k\left(\tilde{T}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\tilde{T}\right)=\tilde{\gamma}_{mn}D_k\left(\tilde{t}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}\right). \quad (34.24)$$

Так как плотность полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского дается формулой

$$\sqrt{-\gamma}t^{kn}=\tilde{t}^{kn}-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kn}\tilde{t}, \quad (34.25)$$

то, используя это выражение, а также (34.11), соотношение (34.24) запишем в виде

$$D_m t_n^m=\nabla_m T_n^m. \quad (34.26)$$

Последнее равенство является отражением принципа геометризации: ковариантная дивергенция в псевдоевклидовом пространстве от суммы плотностей тензоров энергии-импульса вещества и гравитационного поля точно равна ковариантной дивергенции в эффективном римановом пространстве только от плотности тензора энергии-импульса вещества. При выполнении уравнений движения вещества имеем

$$D_m t_n^m=\nabla_m T_n^m=0. \quad (34.27)$$

Из ковариантного уравнения сохранения вещества в римановом пространстве не ясно, что́ сохраняется, тогда как из закона сохранения полного тензора энергии-импульса t_n^m в пространстве Минковского ясно, что речь идет о сохранении энергии-импульса вещества и гравитационного поля, вместе взятых. Таким образом, в данной теории риманово пространство возникает как результат воздействия гравитационного поля на все виды материи, поэтому оно является эффективным римановым пространством полевого происхождения. Пространство Минковского находит свое точное физическое отражение в законах сохранения тензора энергии-импульса и момента количества движения вещества и гравитационного поля, вместе взятых.

Поскольку в плоском пространстве существует десять векторов Киллинга, то, следовательно, имеют место и десять сохраняющихся интегральных величин для замкнутой системы полей.

Так как уравнение сохранения полного тензора энергии-импульса в пространстве Минковского

$$D_m t^m_n = D_m (t^m_{gn} + t^m_{\text{м}n}) = 0 \tag{34.28}$$

эквивалентно ковариантному уравнению сохранения вещества в римановом пространстве, а последнее эквивалентно уравнениям движения для вещества, то вместо уравнения движения вещества можно использовать (34.28).

Следует особо отметить, что как вещество, так и гравитационное поле в данной теории характеризуются тензорами энергии-импульса, а поэтому у нас, в отличие от ОТО, в принципе не возникают какие-либо псевдотензоры, а следовательно, и отсутствуют нефизические понятия о нелокализуемости гравитационной энергии.

Если бы мы, следуя Гильберту и Эйнштейну, взяли плотность лагранжиана гравитационного поля в полностью геометризованном виде, т. е. зависящем только от метрического тензора риманова пространства g^{ik} и их производных, например $\mathfrak{L}_g = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна риманова пространства, то плотность тензора энергии-импульса свободного гравитационного поля в пространстве Минковского, в силу уравнений поля, всегда была бы равна нулю:

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \gamma^{mn}} = \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta g^{pk}} \frac{\partial g^{pk}}{\partial \gamma^{mn}} = 0. \tag{34.29}$$

Таким образом, на основе пространства Минковского с помощью тензорного физического поля, обладающего энергией и импульсом, в принципе нельзя построить полностью геометризованный лагранжиан гравитационного поля. Поэтому теория, построенная на основе полностью геометризованного лагранжиана, в принципе не может описать физическое гравитационное поле в духе Фарадея—Максвелла в пространстве Минковского. В литературе ранее утверждалось (см., например, [50]), что в пространстве Минковского с помощью тензорного поля спина 2 однозначно находится лагранжиан гравитационного поля ОТО, равный скалярной кривизне R. Однако эти работы не имеют никакого физического содержания, так как для введенного в них гравитационного поля тензор энергии-импульса равен нулю, как это видно из (34.29). Поэтому эти работы физически бессмысленны и результаты их ошибочны.

§ 35. Основное тождество

Как показано в работах [51], в пространстве Минковского симметричный тензор второго ранга f^{ik} может быть разложен в виде прямой суммы неприводимых представлений: одного представления — со спином 2, одного — со спином 1 и двух — со спином 0

$$f^{lm} = [P_2 + P_1 + P_0 + P_{0'}]^{lm}_{ik} f^{ik}, \tag{35.1}$$

где через P_s ($s=2$, 1, 0, 0′) обозначены проекционные операторы, которые удовлетворяют стандартным соотношениям:

$$\begin{gathered} P_s P^t = \delta^t_s P_t \quad \text{(здесь по } t \text{ нет суммирования!);} \\ P^{in}_{s;\,in} = (2s+1); \\ \sum_s P^{lm}_{s;\,ik} = \frac{1}{2}(\delta^l_i \delta^m_k + \delta^m_i \delta^l_k) \equiv \delta^{lm}_{ik}. \end{gathered} \tag{35.2}$$

Операторы P_s удобно сначала записать в импульсном представлении. Для этой цели введем вспомогательные (проекционные) величины

$$X_{ik} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\gamma_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2}\right); \quad Y_{ik} = \frac{q_i q_k}{q^2}. \tag{35.3}$$

Легко показать, что операторы P_s, удовлетворяющие (35.2), через (35.3) могут быть записаны в форме

$$P^{ml}_{0;\,ni} = X_{ni} X^{lm}; \quad P^{ml}_{0';\,ni} = Y_{ni} Y^{ml}; \tag{35.4}$$

$$P^{ml}_{1;\,ni} = \frac{\sqrt{3}}{2}[X^l_i Y^m_n + X^m_n Y^l_i + X^m_i Y^l_n + X^l_n Y^m_i]; \tag{35.5}$$

$$P^{ml}_{2;\,ni} = \frac{3}{2}[X^l_i X^m_n + X^m_i X^l_n] - X_{ni} X^{ml}. \tag{35.6}$$

Из (35.4)—(35.6) видно, что операторы $P^{ml}_{s;\,ni}$ симметричны по индексам (ml) и (ni).

В x-представлении проекционные операторы P_s являются нелокальными интегродифференциальными операторами

$$(P^{ml}_{s;\,ni} f^{ni}) = \int d^4y\, P^{lm}_{s;\,ni}(x-y) f^{ni}(y).$$

Явные выражения для $P^{lm}_{0;\,ni}(x)$ и $P^{ml}_{2;\,ni}(x)$ имеют вид

$$P^{lm}_{0;\,ki}(x) = \frac{1}{3}[\gamma^{lm}\gamma_{ik}\delta(x) + (\gamma^{lm}\partial_i\partial_k + \gamma_{ik}\partial^l\partial^m) D(x) + \\ + \partial_i\partial_k\partial^l\partial^m \Delta(x)]; \tag{35.7}$$

$$P^{lm}_{2;\,ki}(x)=\left(\delta^{lm}_{ik}-\frac{1}{3}\gamma^{lm}\gamma_{ik}\right)\delta(x)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}(\delta^l_i\partial^m\partial_k+\delta^m_k\partial^l\partial_i+\delta^l_k\partial^m\partial_i+\delta^m_i\partial^l\partial_k)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}(\gamma^{lm}\partial_i\partial_k+\gamma_{ik}\partial^l\partial^m)\right]D(x)+\frac{2}{3}\partial^l\partial^m\partial_i\partial_k\Delta(x). \quad (35.8)$$

В (35.7) и (35.8) $D(x)$ является функцией Грина волнового уравнения

$$\Box D(x)=-\delta(x), \quad (35.9)$$

а

$$\Delta(x)=\int D(x-y)\,D(y)\,d^4y$$

и поэтому удовлетворяет уравнению

$$\Box\Lambda(x)=-D(x). \quad (35.10)$$

На основании формул (35.7)—(35.10) легко проверить, что операторы P_0 и P_2 являются сохраняющимися, т. е. для этих операторов имеют место тождества

$$\begin{aligned}\partial_l P^{lm}_{0;\,ni}(x)=\partial^n P^{lm}_{0;\,ni}(x)\equiv 0;\\ \partial_l P^{lm}_{2;\,ni}(x)=\partial^n P^{lm}_{2;\,ni}(x)\equiv 0.\end{aligned} \quad (35.11)$$

Операторы же P_1 и $P_{0'}$ этим свойством не обладают.

Из разложения (35.1) ясно, что если тензорное поле подчинено уравнению

$$\partial_l f^{lm}=0, \quad (35.12)$$

то в него не войдут представления со спинами 1 и 0′. Это значит, что такое тензорное поле описывает только спины 2 и 0.

Легко убедиться, что оператор

$$\Box\,(2P_0-P_2) \quad (35.13)$$

является единственным, локальным и сохраняющимся оператором второго порядка. Действуя этим оператором на функцию

$$\varphi^{in}-\frac{1}{2}\gamma^{in}\varphi,$$

где $\varphi=\gamma_{pq}\varphi^{pq}$, и, учитывая формулы (35.7)—(35.10), найдем

$$\Psi^{mn}=\partial_k\partial_p\left[\gamma^{nk}\varphi^{pm}+\gamma^{mk}\varphi^{pn}-\gamma^{kp}\varphi^{mn}-\gamma^{mn}\varphi^{kp}\right]. \quad (35.14)$$

Структура (35.14) для любого симметричного тензорного поля примечательна тем, что она является локальной, линейной, содержит производные только второго порядка и удовлетворяет закону сохранения, т. е. дивергенция от Ψ^{mn} тождественно равна нулю:

$$\partial_m \Psi^{mn} = 0. \qquad (35.15)$$

В дальнейшем нам понадобится структура (35.14), написанная в терминах ковариантных по метрике Минковского производных для плотности метрического тензора $\tilde{g}^{lm}$:

$$J^{mn} = D_k D_p \left[\gamma^{np}\tilde{g}^{km} + \gamma^{pm}\tilde{g}^{kn} - \gamma^{kp}\tilde{g}^{mn} - \gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\right]. \qquad (35.16)$$

Из (35.16) очевидно, что выполняется тождество

$$D_m J^{mn} \equiv 0, \qquad (35.17)$$

которое мы назовем основным, поскольку оно имеет фундаментальное значение при построении релятивистской теории гравитации.

§ 36. Уравнения релятивистской теории гравитации

В основу релятивистской теории гравитации (РТГ) [30], которая завершила развитие идей, изложенных в работе [44], мы положили следующие физические требования:

I. В теории должны строго выполняться законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для вещества и гравитационного поля вместе взятых. Под веществом мы понимаем все формы материи (включая и электромагнитное поле) за исключением гравитационной. Законы сохранения отражают общие динамические свойства материи и позволяют ввести единые характеристики для различных ее форм. Общие динамические свойства материи, определяемые законами сохранения, находят воплощение в структуре геометрии пространства-времени. Она с необходимостью оказывается псевдоевклидовой (пространство Минковского). Таким образом, геометрия задается не соглашением, как считал Пуанкаре, а однозначно определяется общими динамическими свойствами материи — законами сохранения.

Пространство Минковского обладает четырехпараметрической группой трансляции и шестипараметрической группой вращения. Такая структура пространства-времени отражает динамические свойства материи — ее законы сохранения. Данное положение кардинальным образом отличает РТГ от общей теории относительности и полностью выводит нас из дебрей римановой геометрии.

II. Гравитационное поле описывается симметрическим тензором и является реальным физическим полем, обладающим плотностью энергии-импульса. Если этому полю сопоставлять частицы, то они должны иметь нулевую массу покоя. При этом реальные и виртуальные кванты гравитационного поля имеют спиновые состояния 2 и 0.

Это положение возвращает гравитационному полю физическую реальность, поскольку его даже локально нельзя уничтожить выбором системы отсчета, следовательно, нет никакой (даже локальной) эквивалентности между гравитационным полем и силами инерции. Данное физическое требование в корне отличает РТГ от ОТО.

В положениях I и II мы ввели в гравитацию фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также гравитационное поле типа Фарадея — Максвелла, обладающее плотностью энергии-импульса.

Эйнштейн в ОТО отождествил гравитацию с метрическим тензором риманова пространства, но этот путь привел к отказу от гравитационного поля как физического поля, а также к утрате фундаментальных законов сохранения. Именно поэтому от этого положения Эйнштейна нам необходимо полностью отказаться.

III. На основе пространства Минковского и понятия физического гравитационного поля сформулируем принцип геометризации, суть которого заключается в том, что в силу универсальности, взаимодействие гравитационного поля с веществом описывается путем «подключения» тензора гравитационного поля к метрическому тензору пространства Минковского. Это всегда можно осуществить, поскольку какую бы форму материи мы ни избрали, в ее исходные физические уравнения войдет метрический тензор пространства Минковского. Иначе и не может быть, так как физические процессы протекают во времени и пространстве. В силу такого универсального гравитационного взаимодействия автоматически возникает эффективное риманово пространство, которое в буквальном смысле имеет полевое динамическое происхождение. Согласно принципу геометризации, движение вещества под действием гравитационного поля в пространстве Минковского тождественно его движению в эффективном римановом пространстве. Обсуждая структуру геометрии, Эйнштейн писал в 1921 году: «...вопрос о том, имеет этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности». Это утверждение Эйнштейна с принципиальной точки зрения совершенно правильно.

Но суть дела оказывается гораздо глубже. Главное — понять, какие физические свойства материи определяют геометрию? Действительно, если определять физическую геометрию на основе изучения движения света и пробных тел, то можно допустить, что мы таким образом установили риманову структуру геометрии. Означает ли это, что такую геометрию мы должны положить в основу теории? Нет, не означает, ибо принятие ее автоматически лишило бы нас фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения, поскольку геометрия не обладает группой движения пространства-времени.

Все это произошло в ОТО. Следовательно, даже обнаружив опытным путем риманову геометрию, не надо спешить делать вывод о структуре геометрии, которую необходимо положить в основу теории, а необходимо прежде всего выяснить, действительно ли является это понятие первичным или оно имеет вторичное происхождение. При этом необходимо исходить из общих динамических свойств материи — ее законов сохранения, именно они и являются теми руководящими принципами, которые освещают пути построения физической теории.

Таким образом, не частные физические проявления движения материи, а ее наиболее общие динамические свойства определяют структуру физической геометрии, которая должна лежать в основе теории. В нашей теории (РТГ) физическая геометрия определяется не на основе изучения движения света и пробных тел, а на основе общих динамических свойств материи—ее законов сохранения, которые не только имеют фундаментальное значение, но и экспериментально проверяемы. При этом движение света и пробных тел обусловлено простым действием гравитационного поля на вещество в пространстве Минковского.

Пространство Минковского и гравитационное поле являются исходными первичными понятиями, а эффективное риманово пространство является понятием вторичным, обязанным своим происхождением гравитационному полю и его универсальному действию на вещество. В самой сути принципа геометризации заложено разделение сил инерции и гравитационного поля. Но это разделение только тогда может быть физически реализовано, когда в уравнения для гравитационного поля будет входить метрический тензор пространства Минковского. В ОТО, как легко убедиться непосредственно из уравнений Гильберта—Эйнштейна, такое разделение невозможно. В РТГ пространство Минковского находит отражение не только в законах сохранения, но и в описании физических явлений *). Поэтому пространство Минковского является физическим, а следовательно и наблюдаемым. Характеристики его всегда можно проверить путем соответствующей обработки экспериментальных данных по движению световых сигналов и пробных тел в «эффективном» римановом пространстве. «Что касается того соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема,—писал в свое время В. А. Фок,—то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений». Наблюдаемость, таким образом, следует понимать не в примитивном, а в более об-

---

*) Однозначная и глубокая связь законов сохранения (которые экспериментально проверяемы) со структурой пространства Минковского свидетельствует о его физической наблюдаемости.

Эксперименты с распространением световых сигналов и пробных тел дают сведения лишь об эффективном римановом пространстве, возникающем благодаря действию гравитационного поля на вещество согласно принципу геометризации. ОТО не может содержать понятия пространства Минковского, а поэтому говорить о нем в ОТО просто бессмысленно.

щем и глубоком смысле как адекватность природе. Разумеется, РТГ ни в коем случае не исключает возможность описания движения в эффективном римановом пространстве.

Уравнения РТГ (в противоположность ОТО) содержат метрический тензор пространства Минковского, поэтому все функции, описывающие физические поля, записываются в единых координатах для всего пространства-времени Минковского, например галилеевых (декартовых). В соединении с полевыми уравнениями, определяющими структуру гравитационного поля, возникает совершенно новый физический смысл уравнений Гильберта—Эйнштейна, которые при этом изменяются и существенно упрощаются.

Законы сохранения вещества и гравитационного поля вместе взятых являются следствиями уравнений РТГ и отражают псевдоевклидову структуру пространства-времени. Решая систему уравнений поля, мы установим зависимость метрического тензора эффективного риманова пространства как от координат пространства Минковского, так и от гравитационной постоянной G. Собственное время, измеряемое часами (движущимися вместе с веществом), оказывается зависящим от координат пространства Минковского и гравитационной постоянной G. Таким образом, ход собственного времени зависит от характера гравитационного поля.

Наличие пространства Минковского и присутствие его метрического тензора в уравнениях поля позволяет отделить силы инерции от гравитационного поля и всегда найти его влияние на те или иные физические процессы. С другой стороны, все переменные поля могут быть записаны в единых координатах для всего пространства-времени, например, такие координаты можно взять галилеевыми (декартовыми). Всего перечисленного ОТО в принципе лишена, поскольку в римановой геометрии не существует глобальных декартовых координат. Оставаясь в ОТО, нельзя записать уравнения Гильберта — Эйнштейна в координатах пространства Минковского, поскольку в римановой геометрии, на которой основана ОТО, нет такого понятия.

В настоящем параграфе мы построим в рамках специальной теории относительности и принципа геометризации релятивистские уравнения для вещества и гравитационного поля.

Связь между эффективной метрикой полевого риманова пространства и гравитационным полем всегда можно выбрать в простейшем виде

$$\tilde{g}^{ik}=\sqrt{-g}\,g^{ik}=\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ik}+\sqrt{-\gamma}\,\varphi^{ik}. \qquad (36.1)$$

Полевой переменной гравитационного поля в нашей теории является тензор φ^{ik}. Мы будем считать, что гравитационное поле в общем случае имеет только спин 2 и 0. Такие физические требования, как мы видели в § 35, приводят в галилеевых координатах к следующим четырем уравнениям гравитационного поля:

$$\partial_i\varphi^{ik}=\partial_i\tilde{g}^{ik}=0. \qquad (36.2)$$

Аналогичные условия иногда использовались ранее [9, 52] в ОТО в качестве особого класса координатных гармонических условий для решения задач островного типа. На важность гармонических координатных условий для решения островных задач особенно обращал внимание Фок [9]. Так, он писал: «Сделанные выше замечания о привилегированном характере гармонической системы координат ни в коем случае не должны быть понимаемы в смысле какого-либо запрещения пользоваться другими координатными системами. Ничто не может быть более чуждым нашей точке зрения, чем такое ее толкование...» и далее: «...существование гармонических координат хотя и является фактом первостепенного теоретического и практического значения, но никоим образом не исключает возможности пользоваться другими не гармоническими координатными системами». С точки зрения нашей теории Фок при решении островных задач, сам того не сознавая, просто имел дело с обычными галилеевыми координатами в инерциальной системе отсчета, а последние, как известно из специальной теории относительности, конечно, выделены. В расчетах Фока островных систем гармонические условия являлись поэтому не координатными условиями, как он думал, а, как мы увидим из нашей теории, полевыми уравнениями в галилеевых координатах инерциальной системы отсчета. Именно поэтому они и сыграли важную роль в его конкретных расчетах, о чем, конечно, Фок, как, впрочем, и другие, и не подозревал.

Таким образом, Фок рассматривал гармонические условия только как привилегированные координатные условия и не более, причем, только для задач островного типа. Это и понятно, ведь он, как и все его великие предшественники, находился в плену римановой геометрии, а она в принципе не давала возможности к более глубокому проникновению в сущность проблемы. Чтобы сделать принципиальный шаг и выдвинуть эти условия, необходимо было отказаться от идеологии ОТО, выбраться из дебрей римановой геометрии, распространить, вопреки ОТО, специальный принцип относительности на гравитационные явления, ввести представления о гравитационном поле как физическом поле в духе Фарадея—Максвелла, обладающем энергией и импульсом. Это все и осуществлено в нашей теории, причем, выбор системы координат у нас является произвольным и задается только метрическим тензором γ^{ik} пространства Минковского, как это обычно принято в теории элементарных частиц. Уравнения же (36.2) в нашей теории являются всеобщими и универсальными, поскольку они являются уравнениями гравитационного поля. Они не имеют никакого отношения к выбору системы координат. В пространстве Минковского эти уравнения записываются в ковариантной форме

$$\sqrt{-\gamma}\, D_i \varphi^{ik} = D_i \tilde{g}^{ik} = 0. \tag{36.3}$$

На основании параграфа 35 мы видим, что эти полевые уравнения автоматически исключают из гравитационного тензорного поля спины 1 и 0′. Таким образом, для искомых четырнадцати переменных гравитационного поля и вещества мы уже построили четыре ковариантных уравнения поля (36.3). Для построения следующих десяти уравнений мы воспользуемся простой, но далеко идущей аналогией с электромагнитным полем. Так как любое векторное поле A^n содержит спин 1 и спин 0, оно может быть разложено как прямая сумма соответствующих неприводимых представлений. Это разложение можно реализовать с помощью введенных в § 35 проекционных операторов (35.3)

$$A^n = X^n_m A^m + Y^n_m A^m, \tag{36.4}$$

причем, оператор X^n_m является сохраняющимся, т. е. удовлетворяет тождествам

$$\partial_n X_m^n = \partial^m X_m^n \equiv 0, \tag{36.5}$$

а оператор Y_m^n таким свойством не обладает.

Из электродинамики известно, что источником электромагнитного поля A^n является сохраняющийся электромагнитный ток j^n. Поэтому естественно для построения уравнения движения для поля использовать также сохраняющийся оператор X_m^n. Но этот оператор нелокален. Однако на его основе можно построить единственный, содержащий только вторые производные, локальный, линейный и сохраняющийся оператор $\Box X_m^n$. Действуя этим оператором на A^m, получим выражение, которое в терминах ковариантных производных будет иметь вид

$$\gamma^{mk} D_m D_k A^n - D^n D_m A^m. \tag{36.6}$$

Постулируя равенство

$$\gamma^{mk} D_m D_k A^n - D^n D_m A^m = \frac{4\pi}{c} j^n, \tag{36.7}$$

получим известные уравнения Максвелла.

Одной из важнейших особенностей уравнения электродинамики (36.7) является то, что оно инвариантно относительно следующего калибровочного преобразования:

$$A^n \to A^n + D^n \varphi, \tag{36.8}$$

где φ — произвольная скалярная функция.

Все физические величины не изменяются при калибровочном преобразовании (36.8). Это означает, что они не зависят от наличия спина 0 в векторном поле A^n. Поэтому калибровочное преобразование может быть выбрано таким образом, чтобы спин 0 из векторного поля был всегда исключен. Последнее означает, что можно ввести условие

$$D_m A^m = 0. \tag{36.9}$$

Таким образом, в электродинамике условие (36.9) можно вводить, но можно и не вводить, поскольку спин 0 векторного поля, в силу калибровочной инвариантности, не сказывается на физических величинах.

Учитывая равенства (36.9) и (36.7), найдем систему уравнений

$$\gamma^{mk} D_m D_k A^n = \frac{4\pi}{c} j^n; \qquad D_m A^m = 0,$$

которые определяют вектор-потенциал A^n, обладающий только спином 1.

Лагранжев формализм, приводящий к этим результатам, общеизвестен. Заметим, что идея построения теории взаимодействия для векторных полей (как абелевых, так и неабелевых) на базе калибровочной инвариантности оказалась чрезвычайно плодотворной и в настоящее время успешно развивается.

Проблемы, с которыми мы сталкиваемся на пути построения остальных уравнений для тензорного гравитационного поля, совершенно другого характера, так как его источник — тензор энергии-импульса — неинвариантен относительно калибровочного преобразования поля $\tilde{\varphi}^{ik}$. По аналогии с электродинамикой Максвелла, построим остальные уравнения для тензорного гравитационного поля. Единственным сохраняющимся тензором второго ранга является тензор энергии-импульса вещества и гравитационного поля в пространстве Минковского t^{mn}, поэтому естественно его взять в качестве полного источника гравитационного поля. Поскольку простейшим, тождественно сохраняющимся тензором, линейным по $\tilde{g}^{mn}$, как мы установили в § 35, является величина J^{mn}, то по аналогии с электродинамикой, постулируем следующие уравнения:

$$J^{mn} \equiv D_k D_p \left[\gamma^{kn}\tilde{g}^{pm} + \gamma^{km}\tilde{g}^{pn} - \gamma^{kp}\tilde{g}^{mn} - \gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\right] = \\ = \lambda \left(t_{\mathrm{g}}^{mn} + t_{\mathrm{M}}^{mn}\right). \qquad (36.10)$$

Такой вид уравнений, вообще говоря, подразумевает автоматическое выполнение закона сохранения тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля в пространстве Минковского

$$D_m \left(t_{\mathrm{g}}^{mn} + t_{\mathrm{M}}^{mn}\right) \equiv D_m t^{mn} = 0, \qquad (36.11)$$

а также, как следствие (см. (34.28)), и выполнение ковариантного закона сохранения вещества в римановом пространстве

$$\nabla_m T^{mn} = 0. \tag{36.12}$$

Тензор энергии-импульса Гильберта T^{mn} можно задать феноменологически. В этом случае (36.12) являются уравнениями движения вещества.

Используя уравнения (36.3) в (36.10), получим

$$\gamma^{kp} D_k D_p \tilde{g}^{mn} = -\lambda\,(t_g^{mn} + t_м^{mn}); \tag{36.13а}$$

$$D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \tag{36.13б}$$

Система уравнений (36.13) и является искомой системой для релятивистской теории гравитации.

Роль уравнений (36.13б) в РТГ существенно отличается от роли (36.9) в электродинамике. Действительно, хотя левая часть уравнений (36.10) инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$\tilde{g}^{mn} \longrightarrow \tilde{g}^{mn} + D^m \tilde{\xi}^n + D^n \tilde{\xi}^m - \gamma^{mn} D_k \tilde{\xi}^k, \tag{36.14}$$

где $\tilde{\xi}^n = \sqrt{-\gamma}\ \xi^n$ является плотностью произвольного 4-вектора $\xi^n(x)$, из-за того, что правая часть (36.10) неинвариантна относительно замены (36.14), мы не имеем в теории произвола типа (36.14) и поэтому уравнения (36.3) не могут быть следствием уравнений (36.10).

Таким образом, в РТГ уравнения (36.3) являются дополнительными независимыми динамическими уравнениями гравитационного поля, а не координатными или калибровочными условиями.

Основной вопрос, на который при построении теории необходимо ответить, заключается в том, чтобы выяснить, существует ли плотность лагранжиана для гравитационного поля со спинами 2 и 0, которая автоматически приводила бы на базе принципа наименьшего действия к уравнениям (36.13).

Общая плотность лагранжиана гравитационного поля $\tilde{\varphi}^{ik}$, описывающая спины 2 и 0 и квадратичная по первым производным поля, имеет вид

$$\mathfrak{L}_g = a\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp} D_l \tilde{g}^{kq} D_p \tilde{g}^{mn} + b\tilde{g}_{kq} D_m \tilde{g}^{pq} D_p \tilde{g}^{km} + \\ + c\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp} D_l \tilde{g}^{km} D_p \tilde{g}^{nq}. \tag{36.15}$$

Характерной особенностью этого лагранжиана является то, что свертка ковариантных производных, взятых по метрике Минковского, осуществляется с помощью эффективного метрического тензора $\tilde{g}^{ik}$ риманова пространства. Можно показать, что это требование для гравитационного поля является следствием принципа геометризации и структуры гравитационного поля, обладающего только спинами 2 и 0.

Система уравнений для гравитационного поля, в силу принципа наименьшего действия, принимает вид

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \tilde{\varphi}^{ik}} + \frac{\delta \mathfrak{L}_м}{\delta \tilde{\varphi}^{ik}} \equiv \frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \tilde{g}^{ik}} + \frac{\delta \mathfrak{L}_м}{\delta \tilde{g}^{ik}} = 0. \qquad (36.16)$$

Здесь учтена связь (36.1). В (36.16) $\mathfrak{L}_м$ является плотностью лагранжиана вещества, а плотность лагранжиана $\mathfrak{L}_g$ задана формулой (36.15).

Для того чтобы система уравнений (36.16) могла быть представлена в форме (36.13), необходимо в плотности лагранжиана (36.15) постоянные a, b и c выбрать определенным и единственным образом. С этой целью на основании формул (34.17), (34.22) и (34.25) найдем для лагранжиана $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g + \mathfrak{L}_м$ плотность тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля t^{mn} в пространстве Минковского. Вычисляя вариацию полного лагранжиана по γ_{mn}, получим

$$t^{mn} = 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{nk}\gamma^{mp} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \tilde{g}^{kp}} + 2bJ^{mn} + \\ + D_p\{(2a+b)[H_k^{pn}\gamma^{km} + H_k^{pm}\gamma^{kn} - H_k^{mn}\gamma^{kp}] - \\ - 2(a+2c)\gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\tilde{g}_{lq}D_k\tilde{g}^{lq}\}, \qquad (36.17)$$

где

$$H_k^{pn} = (\tilde{g}^{pl}D_l\tilde{g}^{qn} + \tilde{g}^{nl}D_l\tilde{g}^{pq})\tilde{g}_{qk}.$$

Из (36.17) мы видим, что уравнения

$$t^{mn} = 2bJ^{mn} + D_p\{(2a+b)[H_k^{pn}\gamma^{km} + H_k^{pm}\gamma^{kn} - H_k^{mn}\gamma^{kp}] - \\ - 2(a+2c)\gamma^{mn}\tilde{g}^{kp}\tilde{g}_{lq}D_k\tilde{g}^{lq}\} \qquad (36.18)$$

эквивалентны уравнениям поля (36.16).

Для того чтобы из равенства

$$D_m t^{mn} = 0 \qquad (36.19)$$

не возникало какого-либо нового уравнения на поле φ^{ik}, что в противном случае привело бы к переопределенной системе уравнений, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a, b и c удовлетворяли условиям

$$a=-\frac{1}{2}b;\qquad c=\frac{1}{4}b. \tag{36.20}$$

При этом выборе постоянных мы имеем тождество

$$D_m t^{mn}\equiv 0.$$

Таким образом, уравнения движения вещества непосредственно следуют из уравнений для гравитационного поля. С учетом (36.20) выражение (36.18) примет вид

$$D_pD_k(\gamma^{km}\tilde{g}^{pn}+\gamma^{kn}\tilde{g}^{pm}-\tilde{g}^{mn}\gamma^{kp}-\gamma^{mn}\tilde{g}^{kp})=\\=\frac{1}{2b}(t_{\mathrm{g}}^{mn}+t_{\mathrm{M}}^{mn})\equiv\frac{1}{2b}t^{mn}, \tag{36.21}$$

который совпадает с написанными нами ранее, по аналогии с электродинамикой, уравнениями (36.10), если положить

$$2b=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, плотность лагранжиана $\mathfrak{L}_{\mathrm{g}}$, которая приводит нас к уравнениям поля в форме (36.21), имеет вид

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{g}}=\frac{1}{2\lambda}\Big[\tilde{g}_{kq}D_m\tilde{g}^{pq}D_p\tilde{g}^{km}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{kq}D_p\tilde{g}^{mn}+\\+\frac{1}{4}\tilde{g}_{km}\tilde{g}_{nq}\tilde{g}^{lp}D_l\tilde{g}^{km}D_p\tilde{g}^{nq}\Big]. \tag{36.22}$$

Из принципа соответствия следует, что постоянная λ равна

$$\lambda=-16\pi. \tag{36.23}$$

Плотность лагранжиана (36.22) с учетом (36.23) может быть представлена в виде

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{g}}=\frac{1}{32\pi}[\tilde{G}^l_{mn}D_l\tilde{g}^{mn}-\tilde{g}^{mn}\tilde{G}^k_{mk}\tilde{G}^l_{nl}], \tag{36.24}$$

где тензор третьего ранга $\tilde{G}^k_{lm}$ определен по формуле

$$\tilde{G}^k_{lm}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{pk}(D_m\tilde{g}_{lp}+D_l\tilde{g}_{mp}-D_p\tilde{g}_{lm}). \tag{36.25}$$

$\mathfrak{L}_g$ также можно записать в форме

$$\mathfrak{L}_g = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\, g^{mn}\,[G^k_{lm}G^l_{nk} - G^l_{mn}G^k_{lk}]. \qquad (36.26)$$

Такой лагранжиан впервые рассматривал Розен [53]. В (36.26) тензор третьего ранга G^k_{ml} равен

$$G^k_{ml} = \frac{1}{2}\, g^{kp}\,(D_m g_{pl} + D_l g_{pm} - D_p g_{lm}). \qquad (36.27)$$

С учетом уравнения (36.3) полная система уравнений для вещества и гравитационного поля будет [28—30]

$$\gamma^{pk} D_p D_k \tilde{g}^{mn} = 16\pi t^{mn}; \qquad (36.28)$$

$$D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \qquad (36.29)$$

Очевидно, что в галилеевой системе координат уравнения (36.28)—(36.29) примут вид

$$\Box\, \tilde{g}^{mn} = 16\pi t^{mn}; \qquad (36.28')$$

$$\partial_m \tilde{g}^{mn} = 0. \qquad (36.29')$$

Если бы мы ограничились только системой уравнений (36.21), то деление метрики риманова пространства на метрику в пространстве Минковского и тензорное гравитационное поле носило бы условный характер и не имело какого-либо физического смысла. Вторая система (36.29) четырех полевых уравнений принципиально отделяет все, что относится к силам инерции, от всего, что имеет отношение к гравитационному полю. Обе системы уравнений (36.28) и (36.29) общековариантны. На поведение гравитационного поля, как обычно, накладываются соответствующие физические условия из заданной, например, галилеевой, системы координат. В ОТО невозможно сформулировать физические условия на метрику g^{mn}, оставаясь в римановом пространстве, поскольку асимптотика метрики всегда зависит от выбора трехмерной системы координат.

Найдем теперь явный вид системы уравнений (36.16). Для лагранжиана (36.22) можно показать, что

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_g}{\partial \tilde{g}^{mn}} = \frac{1}{16\pi}\,[G^k_{ml}G^l_{kn} - G^k_{mn}G^l_{kl}]$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_g}{\partial \tilde{g}^{mn}_{,k}} = \frac{1}{16\pi}\left[G^k_{mn} - \frac{1}{2}\delta^k_m G^l_{nl} - \frac{1}{2}\delta^k_n G^l_{ml}\right].$$

Поэтому

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_g}{\delta \tilde{g}^{mn}} = -\frac{1}{16\pi} R_{mn}, \tag{36.30}$$

где R_{mn} — тензор кривизны второго ранга риманова пространства и равен

$$R_{mn} = D_k G^k_{mn} - D_m G^l_{nl} + G^k_{mn} G^l_{kl} - G^k_{ml} G^l_{nk}. \tag{36.31}$$

Так как в силу (34.6б) и (34.11)

$$2\cdot\frac{\delta \mathfrak{L}_M}{\delta g^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right), \tag{36.32}$$

то из (36.16) найдем

$$\sqrt{-g}\, R_{mn} = 8\pi\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right). \tag{36.33}$$

То есть мы пришли к известной системе уравнений Гильберта—Эйнштейна с той лишь принципиальной разницей, что все переменные поля в них являются функциями координат пространства Минковского, метрический тензор которого входит в уравнения (36.29). Физический смысл имеют решения, которые при соответствующих начальных и граничных условиях удовлетворяют как системе уравнений (36.28), так и системе (36.29).

Система уравнений (36.28) и (36.29) является полной, она содержит столько уравнений, сколько имеется неизвестных переменных поля. Уравнения Гильберта—Эйнштейна (36.33) не содержат метрического тензора пространства Минковского, а поэтому введение этого тензора в них носит иллюзорный характер. И только уравнения (36.29) позволяют однозначно отделить силы инерции от гравитационного поля и тем самым ввести в теорию плоское пространство Минковского. Подчеркнем, что уравнения (36.29) в корне изменяют характер решения уравнений Гильберта—Эйнштейна, приводя к новым физическим предсказаниям. Все это и осуществлено в РТГ. Плотность лагранжиана гравитационного поля (36.22) является единственной, которая ведет к самосогласованной системе уравнений поля и вещества (36.28) и (36.29). Это означает, что уравнения РТГ* являются единственными простейшими уравнениями второго порядка.

Ввиду важности этого факта мы приведем и другую форму доказательства эквивалентности уравнений (36.10) и (36.33), основанного на прямом вычислении тензорных плотностей $t_{\rm g}^{mn}$ и $t_{\rm м}^{mn}$ в пространстве Минковского.

На основании формул (34.17) с учетом связи (36.1) найдем, что плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского для плотности лагранжиана (36.22) равна:

$$t_{\rm g}^{mn} = -\frac{1}{16\pi} J^{mn} - \frac{\sqrt{-\gamma}}{8\pi}\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right) R_{pk}. \qquad (36.34)$$

Здесь у нас, как мы видим, автоматически возник тензор кривизны второго ранга риманова пространства R_{pk}. Аналогично, используя формулы (34.17) и (36.1), а также определение плотности тензора Гильберта (34.6а) для плотности тензора энергии-импульса вещества в пространстве Минковского, найдем

$$t_{\rm м}^{mn} = \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{mn}\gamma^{pk}\right)\left(T_{pk} - \frac{1}{2} g_{pk} T\right). \qquad (36.35)$$

Подставляя (36.34) и (36.35) в уравнения поля (36.10), получим

$$\left(\gamma^{mp}\gamma^{nk} - \frac{1}{2}\gamma^{nm}\gamma^{pk}\right)\left[R_{pk} - \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\left(T_{pk} - \frac{1}{2} g_{pk} T\right)\right] = 0,$$

откуда и приходим к системе уравнений для гравитационного поля в форме (36.33).

Таким образом, система уравнений (36.10) эквивалентна системе уравнений Гильберта—Эйнштейна (36.33). Полная же система уравнений вещества и гравитационного поля (36.28) и (36.29) эквивалентна системе уравнений

$$\sqrt{-g}\, R_{mn} = 8\pi\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right); \qquad (36.36)$$

$$D_m \tilde{g}^{mn} = 0. \qquad (36.37)$$

Следует еще раз особо отметить, что уравнения (36.37) являются всеобщими и универсальными, поскольку это полевые уравнения, описывающие гравитационные поля со спинами 2 и 0. Выбор системы отсчета (или системы координат) задается метрическим тензором пространства Минковского. Уравнения же (36.37) не накладывают никаких ограничений на выбор системы координат. Итак, уравнения (36.37) исключают из плотности тензорного поля $\tilde{\varphi}^{ik}$ спины 1 и 0′, оставляя только спины 2 и 0. Искомые шесть компонент гравитационного поля, соответствующие спинам 2 и 0, и четыре компоненты вещества определяются из уравнений поля (36.28) или эквивалентных им уравнений Гильберта—Эйнштейна (36.36).

Заметим, что некоторые аспекты теории гравитации в пространстве Минковского были рассмотрены в работах [53—55]. Однако даже те из этих авторов, которые были на правильном направлении, в свое время не смогли осознать этого и пошли по другому пути построения теории гравитации, который не привел к чему-то законченному. Наши работы [28—30] завершают построение релятивистской теории гравитации, которая приводит к ряду новых важнейших предсказаний.

Остановимся теперь на некоторых физических следствиях РТГ. Хорошо известно, что для фридмановской однородной и изотропной Вселенной, согласно ОТО, могут быть три модели Вселенной. Одна из них—замкнутая Вселенная, имеющая конечный объем. Какова плотность вещества во Вселенной в настоящее время? На этот вопрос ОТО не может дать определенного ответа. Согласно РТГ, фридмановская однородная и изотропная Вселенная является бесконечной и только «плоской», так как ее трехмерная геометрия евклидова. Это приводит к тому, что плотность энергии вещества во Вселенной должна равняться критической плотности, определяемой на основании измерения постоянной Хаббла. РТГ предсказывает, что во Вселенной должна существовать «скрытая масса», плотность энергии которой почти в сорок раз превышает плотность энергии вещества, наблюдаемой сегодня. Другим важным следствием РТГ является утверждение, что суммарная плотность энергии вещества и гравитационного поля во Вселенной должна равняться нулю.

Мы видим, что предсказание РТГ для развития фридмановской однородной и изотропной Вселенной существенно отличается от выводов ОТО.

Далее из ОТО следует, что массивные объекты с массой, большей трех масс Солнца, за конечный промежуток собственного времени неограниченно сжимаются гравитационными силами, достигая бесконечной плотности. Такой процесс эволюции звезды называют гравитационным коллапсом. Объекты такого типа получили название «черные дыры». Они не имеют материальной поверхности, а поэтому тело, падающее в «черную дыру», при пересечении ее границы не встретит ничего, кроме пустого пространства. Из внутренней области «черной дыры», через ее границу, не может выйти даже свет. Уилер рассматривал гравитационный коллапс и возникающую сингулярность как «один из величайших кризисов всех времен» для фундаментальной физики. С этим согласится каждый, кто проник в сущность ОТО. Релятивистская теория гравитации в корне изменяет характер гравитационного коллапса. Она приводит к явлению гравитационного замедления времени, благодаря которому сжатие массивного тела в сопутствующей системе отсчета происходит за конечное собственное время, и при этом, и это самое главное, плотность вещества остается конечной и не превышает величины 10^{16} г/см^3, яркость тела экспоненциально уменьшается, объект «чернеет», но, в отличие от «черных дыр», всегда имеет материальную поверхность. Такие объекты, если они возникают, имеют сложное строение, при этом никакого гравитационного самозамыкания не происходит, а поэтому вещество не исчезает из нашего пространства. В РТГ собственное время для падающего пробного тела зависит как от координат пространства Минковского, так и от гравитационной постоянной G, следовательно, ход собственного времени определяется характером гравитационного поля. Именно это обстоятельство и приводит к тому, что собственное время для падающего пробного тела неограниченно замедляется по мере приближения к шварцшильдовскому радиусу. Таким образом, согласно РТГ, никаких объектов «черных дыр», в которых происходит катастрофически сильное сжатие вещества до бесконечной плотности и которые не имеют материальной поверхности, в принципе не может быть в природе. Все это можно точно установить на примере сферически симметричной нестационарной задачи для пыли, когда давление полагается равным нулю. Промежуток собственного времени $d\tau$ для падающего тела связан с промежутком времени пространства Минковского dt формулой

$$d\tau = dt\left(\frac{\rho - GM}{\rho + GM}\right),$$

где ρ — радиальная переменная в пространстве Минковского.

Из приведенной формулы непосредственно видно, что, когда ρ приближается к значению, равному GM, изменение собственного времени $d\tau$ стремится к нулю, следовательно, все физические процессы в падающем теле неограниченно замедляются. Согласно РТГ, не существует не только статических, но и нестатических сферически симметричных тел с радиусом меньше или равным GM. Это означает, что никаких дыр в пространстве-времени не может быть. Все это принципиально отличает предсказания РТГ от предсказаний ОТО. Сжатие массивных объектов, когда давление не равно нулю, будет, конечно, слабее, поскольку давление препятствует гравитационному притяжению. Эволюция реальных объектов требует более детального изучения с использованием уравнения состояния вещества и является очень интересной проблемой.

РТГ объясняет всю имеющуюся совокупность наблюдательных и экспериментальных данных для гравитационных эффектов в Солнечной системе. Детальный анализ показывает неоднозначность предсказаний ОТО для гравитационных эффектов в Солнечной системе, причем для одних эффектов произвол возникает в членах первого порядка по гравитационной постоянной G, а для других — в членах второго порядка. В чем причина неоднозначности? В ОТО для определения метрики риманова пространства в каких-либо координатах необходимо задать так называемые координатные условия, которые весьма произвольны и всегда нековариантны (т. е. относятся только к определенной выбранной системе координат). В зависимости от вида этих условий мы в одних и тех же координатах в общем случае обязательно получим разные метрические тензоры. Но разные метрические тензоры в одних и тех же координатах будут давать и разные геодезические, а это значит, что будут различны и предсказания ОТО для движения света и пробных тел.

Следует отметить, что Вейль и Лоренц показали: при известных уравнениях всех времениподобных и всех изотропных геодезических линий в какой-либо системе координат метрический тензор пространства-времени в этой системе определяется с точностью до постоянного множителя, т. е. с физической точки зрения, изучая движение света и пробных тел, можно экспериментально установить структуру геометрии пространства-времени. Согласно этой теореме, разные метрические тензоры в данной системе координат ведут к разным предсказаниям о движении света и пробных тел.

Рассмотрим один мысленный эксперимент, отчетливо демонстрирующий произвол предсказаний ОТО. Пусть в инерциальной системе отсчета два пробных тела, разнесенных на некоторое расстояние, закреплены в точках A и B, а в точке O, очень близкой к линии AB, но равноудаленной от A и B, укреплена «игла», на которую можно насадить массивное (малых размеров) тело M. Проведем на этой «установке» два опыта. Сначала, отведя тело M от «установки» на расстояние, много большее AB (в бесконечность), определим время распространения светового сигнала от A к B и обратно. Затем, вернув тело M и «насадив» его на «иглу», повторим измерения. В присутствии тела M величина времени t_0 заменится на время t, а их разность даст время гравитационного запаздывания $t-t_0=\Delta t$, возникающего из-за действия тела на движение светового сигнала. Если теперь вычислить во втором опыте время распространения t (пользуясь, например, в одних и тех же координатах, гармоническим и шварцшильдовским решениями), а потом вычесть из полученного результата t_0, то времена запаздывания для таких разных решений в одних и тех же координатах окажутся разными*). Таким образом, ОТО не дает определенного предсказания для данного опыта.

Перейдем теперь к обсуждению гравитационного излучения. Изучая гравитационные волны [8], Эйнштейн писал:

*) Многозначность решений уравнений Гильберта—Эйнштейна в одних и тех же координатах, мягко говоря, ускользнула от внимания академика Зельдовича, а поэтому его утверждение в работе (УФН, 1986, т. 149, № 4) об однозначности описания просто ошибочно. Статья Зельдовича содержит и другие неправильные утверждения, но о них будет сказано специально в другом месте.

«Можно было бы предположить, что посредством соответствующего выбора системы отсчета всегда можно добиться обращения в нуль всех компонент энергии гравитационного поля, что было бы в высшей степени интересно. Однако легко показать, что это, вообще говоря, не так». Эйнштейн в полном соответствии со своим принципом эквивалентности ожидал обращения в нуль всех компонент «энергии гравитационного поля», поэтому он и считал этот результат в высшей степени интересным. Однако установить это ему не удалось. Уже совсем недавно было показано, что гравитационное излучение, как оно определено в ОТО Эйнштейном, действительно может быть уничтожено выбором допустимой системы отсчета. Это как раз и есть тот результат, который Эйнштейн считал в высшей степени интересным. Из него следует, что последняя фраза в приведенном выше высказывании Эйнштейна не верна. Но если излучение можно уничтожить, оставаясь в рамках ОТО, то из этого следует, что формула Эйнштейна для квадрупольного гравитационного излучения не является следствием его теории. Здесь Эйнштейн скорее руководствовался глубокой физической интуицией, чем логикой своей теории. Она помогла ему получить правильную формулу для излучения, но не позволила раскрыть сущность ОТО. В РТГ гравитационное поле является физическим полем, и оно в принципе даже локально не может быть уничтожено выбором системы отсчета. РТГ предсказывает существование гравитационных волн, переносящих энергию и импульс, что в принципе отсутствует в ОТО. Утверждение, что ОТО предсказывает существование гравитационных волн, просто ошибочно и основано на непонимании логики теории. Формула Эйнштейна является следствием релятивистской теории гравитации, а не ОТО.

Таким образом, на основе законов сохранения и представлений о гравитационном поле, как физическом поле, обладающем плотностью энергии-импульса, в соединении с принципами геометризации и локальной калибровочной инвариантности, однозначно построена релятивистская теория гравитации, которая объясняет все известные наблюдательные и экспериментальные данные о гравитации и дает новые предсказания о развитии фридмановской Вселенной и гравитационном коллапсе.

§ 37. О неоднозначности предсказаний ОТО для гравитационных эффектов и основные положения РТГ

Отсутствие в ОТО законов сохранения — не единственный ее принципиальный недостаток. Как будет видно из дальнейшего, неоднозначность предсказаний органически присуща ОТО и распространяется на все гравитационные эффекты. Покажем это на примере эффекта гравитационной задержки радиосигнала в поле статического центрально-симметричного тела массы M.

Отправляясь от уравнения Гильберта — Эйнштейна (36.36), мы должны учесть, что заложенные в это уравнение пространственно-временные координаты x^μ представляют собой некое многообразие, фиксируемое выбираемой арифметизацией пространства-времени. Не будет поэтому ограничением общности, если, уславливаясь об арифметизации пространства, мы сопоставим в переменных $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ центру S тела M точку $r = r_s = 0$, любой точке поверхности этого тела (считая его шарообразным) — значение $r = r_f$, положению источника радиоимпульсов — точку $e(r_1, \varphi_1, \theta_1 = \pi/2)$ и положению приемника или рефлектора, отражающего сигналы обратно в точку e, — точку $p(r_2, \varphi_2, \theta_2 = \pi/2)$. В выбранной арифметизации одним из общих внешних (по отношению к телу M) решений уравнений Гильберта — Эйнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu}_M,$$

(где $R^{\mu\nu}$ — тензор Риччи, $R = R^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$) будет (вне тела) решение [56] с произвольной функцией $C(r)$:

$$g_{kl} = -C\delta_{kl} + (C - A)\frac{x^k x^n}{r^2}, \quad g_{00} = B, \quad g = -BAC^2,$$

$$g^{kn} = -\frac{\delta_{kn}}{C} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\frac{x^k x^n}{r^2}, \quad g^{00} = \frac{1}{B},$$

в котором

$$B = 1 - \frac{2GM}{r\sqrt{C}}, \quad A = C\left(1 + \frac{rC'}{2C}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{r\sqrt{C}}\right)^{-1},$$

$C' \equiv \dfrac{\partial C}{\partial r}$. Что же касается функции $C(r)$, то от нее требуется только, чтобы она была гладкой и $\lim\limits_{r \to \infty} C(r) \longrightarrow 1$.

Данный произвол и ведет в итоге к неоднозначности предсказаний ОТО для гравитационных эффектов (как и в неопределенности энергии-импульса гравитационного поля (ГП)) в поле центрально-симметричного источника. Действительно, взяв, например,

$$C(r) = 1 \quad \text{или} \quad C(r) = (1 + GM/r)^2, \tag{37.1}$$

получим два следующих разных частных решения для $g_{\mu\nu}(r, GM)$, определяющих элемент ds^2:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \quad (37.2)$$

в первом случае и

$$ds^2 = \left(\frac{r - GM}{r + GM}\right) dt^2 - \left(\frac{r + GM}{r - GM}\right) dr^2 - r^2 \left(1 + \frac{GM}{r}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \quad (37.3)$$

во втором. При этом в обоих решениях координата r — одна и та же (как и t, θ, φ), т. е. и в (37.2), и в (37.3) точкам $r = r_s = 0$, $r = r_f$, $e(r_1, \varphi_1, \theta_1 = \pi/2)$ и $p(r_2, \varphi_2, \theta_2 = \pi/2)$ соответствуют положения центра S тела M, его поверхности, источника и приемника (или рефлектора) радиоимпульсов.

Переход в (37.3) от координаты r к переменной $\rho \equiv r + GM$ преобразует (37.3) к виду, лишь по форме адекватному (37.2):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{\rho}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \quad (37.2\text{a})$$

Однако по содержанию они существенно отличаются, так как в (37.2а) центру S тела M соответствует значение $\rho_s = + GM$, а в (37.2) $r_s = 0$. Аналогично обстоит дело и при переходе в (37.2) от r к $\rho \equiv r - GM$, сводящему (37.2) к выражению, по виду сходному с (37.3), но по существу не эквивалентному (37.3), поскольку указанный переход меняет значение $r_s = 0$ на значение $\rho_s = - GM$.

Пользуясь стандартными методами и ограничиваясь в расчетах первым порядком по G, для времени распространения в один конец получим (при $\varphi_2 - \varphi_1 > \pi/2$ и совпадении перицентра с r_f) выражения [57, 58]

$$t = \sqrt{r_p^2 - r_f^2} + \sqrt{r_e^2 - r_f^2} + GM \left\{ 2 \ln \frac{r_p + \sqrt{r_p^2 - r_f^2}}{r_e - \sqrt{r_e^2 - r_f^2}} + \left[\left(\frac{r_p - r_f}{r_p + r_f}\right)^{1/2} + \left(\frac{r_e - r_f}{r_e + r_f}\right)^{1/2} \right] \right\} \quad (37.4)$$

в случае решения (37.2) и

$$t = \sqrt{r_p^2 - r_f^2} + \sqrt{r_e^2 - r_f^2} + GM \left\{ 2 \ln \frac{r_p + \sqrt{r_p^2 - r_f^2}}{r_e - \sqrt{r_e^2 - r_f^2}} + 2 \left[\left(\frac{r_p - r_f}{r_p + r_f}\right)^{1/2} + \left(\frac{r_e - r_f}{r_e + r_f}\right)^{1/2} \right] \right\} \quad (37.5)$$

в случае решения (37.3). Перейдем в (37.4), (37.5) от чисел $r_{e,\,p,\,f}$ к физическим наблюдаемым величинам. Для этого, пользуясь соответственно метрикой (37.2) и (37.3), вычислим в том же первом порядке по G радиальные физические расстояния (измеряемые экспериментально) от поверхности r_f до r_e и r_p:

$$l_{e,\,p}=\int\limits_{r_f}^{r_{e,\,p}} dr\sqrt{-g_{rr}}=r_{e,\,p}-r_f+GM\ln(r_{e,\,p}/r_f). \qquad (37.6)$$

Как видно, в первом порядке по G они будут одинаковыми для обеих метрик. Вычислим, кроме того (в том же, естественно, первом порядке по G), относительный сдвиг частоты (измеряемый экспериментально) в гравитационном поле источника M:

$$\left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_{e,\,p}\equiv\delta_{e,\,p}=GM\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_{e,\,p}}\right) \qquad (37.7)$$

— опять-таки одинаковый (при выбранной точности) для обеих метрик. Пользуясь (37.6), (37.7), теперь можно выразить в (37.4), (37.5) $r_{e,\,p,\,f}$ через измеримые величины $l_{e,\,p}$ и $\delta_{e,\,p}$. Сравнивая после этого времена t распространения радиосигнала от e к p, вытекающие из (37.4) и (37.5), легко заметить их явное несовпадение, что и констатирует неоднозначность предсказаний ОТО для времени t, проявляющуюся в этом эффекте в величинах первого порядка по G.

При $r_f \ll r_{e,\,p}$ из (37.4), (37.5) с учетом (при выбранной точности) эффекта отклонения сигнала гравитационным полем источника следуют выражения

$$t=R+2GM\ln\frac{r_e+r_p+R}{r_e+r_p-R}-2GM, \qquad (37.4а)$$

$$t=R+2GM\ln\frac{r_e+r_p+R}{r_e+r_p-R}, \qquad (37.5а)$$

в которых

$$R=\sqrt{r_e^2-r_\perp^2}+\sqrt{r_p^2-r_\perp^2} \qquad (37.8)$$

— относительное расстояние (по прямой) между точками e и p, а $r_\perp$ — координата точки пересечения прямых, соединяющих e и p — с одной стороны, S и перицентр траектории сигнала — с другой.

Анализ других известных гравитационных эффектов, проведенный в [58—61], показывает, что в классе решений $C(r)=[1+(\lambda+1)(GM/r)]^2$, где λ — свободный параметр, неоднозначность предсказаний ОТО проявляется во всех без исключения эффектах.

Основные исходные положения РТГ можно кратко сформулировать следующим образом:

I. В качестве фундаментального, базового пространства в РТГ принимается пространство x^μ Минковского (с метрикой $\gamma^{\mu\nu}$). Это положение отражает присущее всей материи, независимо от ее природы, свойство универсальности законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения в отдельности.

II. Гравитационное поле в РТГ рассматривается как реальное (с нулевой массой покоя) физическое поле в этом пространстве со всеми присущими другим физическим полям атрибутами; ему сопоставляется полевой симметричный тензор $\Phi^{\mu\nu}$ второго ранга с представлениями, соответствующими спиновым состояниям два и нуль.

III. Плотность лагранжиана других форм материи (исключая ГП) в силу универсальности гравитационных взаимодействий и тензорвого характера ГП строится в РТГ на основе сверток с эффективным тензором $g^{\mu\nu}$, определяемым «подключением» гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$ к метрическому тензору $\gamma^{\mu\nu}$ по правилу

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{\mu\nu} + \sqrt{-\gamma}\, \Phi^{\mu\nu} \equiv \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu}; \quad (37.9)$$

при этом входящие в лагранжиан производные от негравитационных физических полей полагаются ковариантными производными ∇_μ по эффективной метрике $g^{\mu\nu}$.

Положение III, которое удобно назвать «принципом геометризации», вводит в теорию как следствие универсальности гравитационных взаимодействий и тензорного характера ГП вторичное понятие эффективного риманова пространства (с метрикой $g^{\mu\nu}$, заданной в одной карте), имеющего, как видно, чисто полевое происхождение; первичными понятиями в теории остаются пространство Минковского (с метрикой $\gamma^{\mu\nu}$) и гравитационное поле $\Phi^{\mu\nu}$ в этом пространстве. Принцип геометризации в РТГ не адекватен принципу эквивалентности в ОТО, поскольку в РТГ, как и в других физических полевых теориях, в силу тензорного (а не псевдотензорного) характера всех получаемых на основе РТГ физических величин плотность энергии ГП в точке никакими координатными преобразованиями нельзя обратить в нуль, хотя силовое действие ГП в точке скомпенсировать можно.

IV. Плотность лагранжиана гравитационного поля полагается в РТГ квадратичной функцией ковариантных по метрике $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского производных первого порядка $D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}$.

На основе положений I — IV релятивистская теория гравитации строится однозначно.

Самым прямым путем построения удовлетворяющей положению IV (с учетом положений I — III) скалярной плотности $\mathcal{L}_g(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu})$ лагранжиана свободного ГП в пространстве Минковского было бы ее представление в виде общей суперпозиции всевозможных сверток квадратичных по производным первого порядка $D_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}$ форм с тензорами $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ (см., например, [56, 62] *)). Здесь мы поступим несколько иначе: будем искать структуру $\mathcal{L}_g$, изначально опираясь на калибровочный принцип [62], требующий, чтобы плотность лагранжиана свободного ГП при преобразованиях вида

$$\delta_\varepsilon \tilde{\Phi}^{\mu\nu} \equiv \delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\lambda} D_\lambda \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\lambda} D_\lambda \varepsilon^\mu(x) - D_\lambda(\varepsilon^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}) \quad (37.10)$$

изменялась не более чем на дивергенцию **):

$$\mathcal{L}_g \longrightarrow \mathcal{L}_g + D_\nu Q^\nu(x).$$

В (37.10) $\varepsilon^\nu(x)$ суть инфинитезимальные параметры калибровочного

---

*) С помощью калибровочного принципа плотность лагранжиана $\mathcal{L}_g$ определяется таким путем однозначно.

**) Калибровочное преобразование (37.10) поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ существенно отличается от его координатного ($x \longrightarrow x + \xi$) преобразования:

$$\delta_\xi \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \tilde{\Phi}^{\mu\lambda} D_\lambda \xi^\nu(x) + \tilde{\Phi}^{\nu\lambda} D_\lambda \xi^\mu(x) - D_\lambda(\xi^\lambda \tilde{\Phi}^{\mu\nu}).$$

преобразования, а операторы δ_ε, удовлетворяющие равенствам

$$(\delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}-\delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1})\,\tilde{g}^{\mu\nu}(x)=\delta_{\varepsilon_3}\tilde{g}^{\mu\nu}(x),$$

где

$$\varepsilon_3^\nu=\varepsilon_1^\mu D_\mu\varepsilon_2^\nu-\varepsilon_2^\mu D_\mu\varepsilon_1^\nu,$$

образуют алгебру Ли. Одновременно с этим необходимо учесть и требование положения II об исключении из состояний поля $\Phi^{\mu\nu}$ его представлений, соответствующих спиновым значениям 1 и 0′, что можно сделать, подчинив поле $\Phi^{\mu\nu}$ полевому уравнению

$$D_\mu\Phi^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}=0. \qquad (37.11)$$

Следует особо подчеркнуть, что уравнение (37.11) не только исключает из рассмотрения нефизические спиновые состояния гравитационного поля $\Phi^{\mu\nu}$, но и делает метрику $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского неустранимой из теории *), позволяя тем самым отделять проявления неинерциальности от проявлений ГП. Одновременно полевые уравнения (37.11) сужают класс возможных калибровочных преобразований (37.10) до многообразия 4-векторов $\varepsilon^\nu(x)$, удовлетворяющих уравнению

$$g^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\varepsilon^\nu(x)=0. \qquad (37.12)$$

Переходя к построению уравнений, которые в совокупности с (37.11) образуют систему основных уравнений ГП, учтем, что простейшими плотностями, изменяющимися при преобразованиях (37.10) на дивергентную величину, являются

$$\sqrt{-g}\longrightarrow\sqrt{-g}-D_\nu(\varepsilon^\nu\sqrt{-g})$$

и

$$\sqrt{-g}\,R\longrightarrow\sqrt{-g}\,R-D_\nu(\varepsilon^\nu\sqrt{-g}\,R),$$

где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства-времени, определяемая равенством

$$\sqrt{-g}\,R=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left[(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}-\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda})+\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\right]=$$
$$=-\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma}-G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda})-D_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}G^\sigma_{\mu\sigma}-\tilde{g}^{\mu\sigma}G^\nu_{\mu\sigma}),$$

в котором

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

$$G^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu}+D_\nu g_{\sigma\mu}-D_\sigma g_{\mu\nu}).$$

К ним можно еще добавить член $\sim\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}$, также удовлетворяющий в силу (37.11) калибровочному принципу. Тогда в общем случае $\mathscr{L}_g$

*) В силу сказанного уравнение (37.11) не может иметь никакого отношения к координатным условиям.

можно представить в виде

$$\mathcal{L}_g = \lambda_1 \left(\sqrt{-g}\, R + D_\nu Q^\nu (x)\right) + \lambda_2 \sqrt{-g} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4 \sqrt{-\gamma}. \tag{37.13}$$

Здесь дивергентное слагаемое

$$D_\nu Q^\nu (x) = D_\nu \left(\tilde{g}^{\mu\nu} G^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma} G^\nu_{\mu\sigma}\right)$$

добавлено (пользуясь калибровочным принципом) с целью исключить из $\mathcal{L}_g$ члены со вторыми производными, входящими в $\sqrt{-g}\, R$, а смысл остальных величин прояснится ниже.

Лагранжиан (37.13) дает следующее выражение для тензора энергии-импульса ГП в пространстве Минковского:

$$t^{\mu\nu}_{(g)} \equiv -2 \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta} \right) \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} + \\ + \lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \tag{37.14}$$

где

$$J^{\mu\nu} \equiv D_\alpha D_\beta \left(\gamma^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \right). \tag{37.15}$$

Учитывая принцип наименьшего действия, из (37.14) получим две разные по виду, но идентичные по содержанию формы динамического уравнения ГП:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \tag{37.16}$$

где

$$R_{\mu\nu} \equiv D_\lambda G^\lambda_{\mu\nu} - D_\mu G^\lambda_{\nu\lambda} + G^\sigma_{\mu\nu} G^\lambda_{\sigma\lambda} - G^\sigma_{\mu\lambda} G^\lambda_{\nu\sigma} \tag{37.17}$$

и

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.18}$$

Чтобы в отсутствие гравитационного поля уравнение (37.16) удовлетворялось тождественно и $t^{\mu\nu}_{(g)} \equiv 0$, необходимо положить $\lambda_4 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -2\lambda_3$. Значения λ_1 и λ_3 легко идентифицировать, записав (37.18) с учетом (37.11), (37.9):

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + 2 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.19}$$

Наглядный вид (37.19) приобретает в галилеевых координатах:

$$\Box \Phi^{\mu\nu} + 2 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \Phi^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.19a}$$

Очевидно, что фактору $(+2\lambda_3/\lambda_1) \equiv m^2$ естественно придать смысл квадрата массы покоя ГП, а значение $(-1/\lambda_1)$ согласно принципу соответствия необходимо взять равным 16π, т. е.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = +\frac{m^2}{16\pi}, \quad \lambda_3 = \frac{-m^2}{32\pi}.$$

Таким образом, построенный на основе калибровочного принципа лагранжиан свободного ГП в пространстве Минковского в общем случае будет иметь вид

$$\mathcal{L}_g=\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\mu\nu}\left(G^{\lambda}_{\mu\nu}G^{\sigma}_{\lambda\sigma}-G^{\lambda}_{\mu\sigma}G^{\sigma}_{\nu\lambda}\right)-\frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}-\sqrt{-g}-\sqrt{-\gamma}\right). \tag{37.20}$$

Соответствующие ему динамические уравнения ГП, дополнительные к уравнениям (37.11), могут быть представлены двумя полностью эквивалентными формами:

$$R^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)=0, \tag{37.21}$$

или

$$D_\alpha D_\beta\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu}+\gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}-\gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu}-\gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right)+ \\ +m^2\left(\tilde{g}^{\mu\nu}-\tilde{\gamma}^{\mu\nu}\right)=16\pi t^{\mu\nu}_{(g)}. \tag{37.22}$$

Отсюда следует, что для гравитационного поля, обладающего массой покоя, законы сохранения энергии-импульса $D_\mu t^{\mu\nu}_{(g)}=0$ будут иметь место только при выполнении уравнений (37.11). Особо подчеркнем, что уравнения (37.21) или (37.22) не являются калибровочно инвариантными, даже если $\varepsilon^\nu(x)$ удовлетворяет (37.12). Это значит, что введение в лагранжиан массового члена снимает вырождение *) и однозначно определяет геометрию пространства-времени, а также плотность тензора энергии-импульса ГП.

Полная система уравнений свободного ГП имеет вид

$$R^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)=0, \qquad D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}=0, \tag{37.23}$$

или, в другой эквивалентной форме,

$$\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu}+m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}=16\pi t^{\mu\nu}_{(g)}, \qquad D_\mu\tilde{\Phi}^{\mu\nu}=0. \tag{37.24}$$

При наличии других форм материи полная плотность лагранжиана в силу положений III, IV представляется в виде

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_M\left(\tilde{g}^{\mu\nu},\ \Phi_a\right)+\mathcal{L}_g\left(\tilde{\gamma}^{\mu\nu},\ \tilde{g}^{\mu\nu},\ D_\lambda\tilde{g}^{\mu\nu}\right), \tag{37.25}$$

где Φ_a — поля материи (исключая ГП), а $\mathcal{L}_g$ дается уравнением (37.20). Это приводит к следующим динамическим уравнениям:

$$D_\alpha D_\beta\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu}+\gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}-\gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\nu\beta}-\gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right)+ \\ +m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}=16\pi t^{\mu\nu}. \tag{37.26}$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ является плотностью симметричного тензора энергии-импульса всей материи $\left(t^{\mu\nu}=t^{\mu\nu}_{(g)}+t^{\mu\nu}_{(M)}\right)$ в пространстве Минковского. Уравнения (37.26) тождественно приводятся к уравнениям

$$R^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)=\frac{8\pi G}{\sqrt{-g}}\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \tag{37.27}$$

*) Без массового члена уравнение (37.22) калибровочно инвариантно.

где $T^{\mu\nu}=-2(\delta\mathscr{L}_M/\delta g_{\mu\nu})$ — плотность тензора энергии-импульса негравитационных видов материи в эффективном римановом пространстве. Учитывая полевые уравнения (37.11), приходим в итоге к принципиально отличной от ОТО системе равноправных по своей значимости основных динамических уравнений РТГ:

$$\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\mu\nu}+m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}\equiv\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu}+m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}=16\pi t^{\mu\nu}, \quad (37.28)$$

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv D_\mu\tilde{\Phi}^{\mu\nu}=0, \quad (37.29)$$

или, в эквивалентной форме,

$$R^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}\left(g^{\mu\nu}-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)=\frac{8\pi G}{\sqrt{-g}}\left(T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \quad (37.28a)$$

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}=0. \quad (37.29a)$$

В уравнениях (37.28), (37.29) или (37.28а), (37.29а) все полевые переменные являются функциями координат пространства Минковского, а метрика $\gamma^{\mu\nu}$ этого пространства входит в уравнения неустранимым образом. При заданных граничных и начальных условиях решение основной системы РТГ будет обладать свойством единственности *), благодаря чему получаемые с ее помощью физические величины и предсказания также будут однозначными. В силу полевых уравнений (37.29) из (37.28) непосредственно следует закон сохранения энергии-импульса $D_\mu t^{\mu\nu}=0$, не содержащий никаких неоднозначностей [63], поскольку метрика $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского органически входит в уравнения РТГ. Подчеркнем еще раз, что этот закон имеет место только при выполнении полевых уравнений (37.29). Если исходить из (37.28а), то, учитывая равенства

$$\nabla_\lambda\gamma_{\mu\nu}=-G^\sigma_{\lambda\mu}\gamma_{\sigma\nu}-G^\sigma_{\lambda\nu}\gamma_{\mu\sigma}, \qquad D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv\sqrt{-g}\left(D_\mu g^{\mu\nu}+G^\lambda_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}\right)=0,$$

где ∇_λ — ковариантная производная по метрике $g_{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства, придем к другой форме записи закона сохранения:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0.$$

Положим далее формально массу покоя ГП равной нулю. Тогда

$$\mathscr{L}_g=\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\mu\nu}\left(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma}-G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda}\right), \quad (37.20a)$$

а динамические уравнения свободного ГП примут вид

$$D_\alpha D_\beta\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu}+\gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}-\gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\nu\beta}-\gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right)=16\pi t^{\mu\nu}_{(g)}. \quad (37.22a)$$

Это уравнение инвариантно относительно допустимых калибровочных преобразований. В то же время тензор $t^{\mu\nu}_{(g)}$ поля не будет калибровочно инвариантным, однако в силу того, что его изменение $\delta_\varepsilon t^{\mu\nu}_{(g)}$

*) С учетом уравнения состояния вещества система (37.28), (37.29) или (37.28а), (37.29а) становится замкнутой системой уравнений, определяющей динамику как поля, так и вещества.

при преобразовании (37.10), как легко убедиться, пользуясь (37.22a), приводится к дивергенции от антисимметричного тензора третьего ранга:

$$\delta_\varepsilon t^{\mu\nu}_{(g)} = -\frac{1}{4\pi} D_\lambda D_\sigma \delta_\varepsilon \Pi^{[\mu\sigma][\nu\lambda]},$$

где

$$\Pi^{[\mu\sigma][\nu\lambda]} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{\lambda\mu}\tilde{g}^{\nu\sigma} + \gamma^{\sigma\nu}\tilde{g}^{\mu\lambda} - \gamma^{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\lambda\sigma}\right),$$

калибровочный произвол $t^{\mu\nu}_{(g)}$ не отразится на определяемых интегральных физических характеристиках [56]. Не будут калибровочно инвариантными и такие величины, как интервал эффективного риманова пространства-времени и соответственно геометрические характеристики последнего [62].

При наличии других форм материи («вещества») полная плотность лагранжиана будет определяться выражением (37.25) с $\mathcal{L}_g$ из (37.20a). Соответствующие ему динамические уравнения примут вид

$$D_\alpha D_\beta \left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\nu\beta} - \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu}\right) = 16\pi t^{\mu\nu}.$$

Из-за наличия «вещества» эти уравнения уже не будут калибровочно инвариантными и, следовательно, теория лишается калибровочного произвола [62].

Совместно с (37.11) система основных уравнений РТГ будет иметь вид

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 16\pi t^{\mu\nu}, \tag{37.30}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv D_\mu \tilde{\Phi}^{\mu\nu} = 0, \tag{37.31}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\sqrt{-g}\, R^{\mu\nu} = 8\pi G\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right), \tag{37.30a}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{37.31a}$$

Хотя уравнения (37.30a) формально по виду и совпадают с уравнениями Гильберта—Эйнштейна, смысл их иной, поскольку полевые переменные в них зависят от координат пространства Минковского, а совместная система содержит метрику пространства Минковского неустранимым образом.

Именно то принципиальное обстоятельство, что полная система уравнений РТГ (включая как уравнения вещества, так и уравнения ГП) органически содержит, кроме полевых переменных вещества и метрического тензора эффективного риманова пространства, еще и метрический тензор пространства Минковского, позволяет РТГ рассматривать все физические поля, в том числе и гравитационное, в едином пространстве Минковского. В ОТО этого сделать нельзя, поскольку ее уравнения не содержат метрического тензора пространства Минковского.

Введение в теорию полевого уравнения (37.31), делающего метрику пространства Минковского неустранимой из теории, находит отражение в описании всех физических явлений и приводит к качественно отличным от ОТО следствиям.

Список литературы

1. *Лоренц Г. А.* Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973. — С. 67 — 90.
2. *Пуанкаре А.* О динамике электрона. // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973.— С. 90—97.
3. *Пуанкаре А.* О динамике электрона // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973.— С. 118 — 161.
4. *Эйнштейн А.* К электродинамике движущегося тела // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973.— С. 97—118.
5. *Пуанкаре А.* Настоящее и будущее математической физики // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973.— С. 22—44.
6. *Минковский Г.* Пространство и время // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973.— С. 167—180.
7. *Эйнштейн А.* Физика и реальность: Сб. статей / Под ред. Франкфурта У. И. — М.: Наука, 1965.
8. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: В 4 т. / Под ред. Тамма И. Е. — М.: Наука, 1965.— Т. 1.
9. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. — 2-е изд., доп. — М.: Физматгиз, 1961.
10. *Рейхенбах Г.* Философия пространства и времени.— Пер. с англ. Молчанова Ю. Б. / Под ред. Логунова А. А.—М.: Прогресс, 1985.
11. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.—М.: Наука, 1972.
12. *Тяпкин А. А.* // УФН. — 1972.— Т. 6. Вып. 4.— С. 617 — 658.
13. *Паули В.* Физические очерки: Сб. статей / Под ред. Смородинского Я. А. — М.: Наука, 1975.— С. 189.
14. *Мёллер К.* Теория относительности. — 2-е изд. — Пер. с нем. / Под ред. Иваненко Д. Д. — М.: Атомиздат, 1975.
15. *Пуанкаре А.* Измерение времени // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А. — М.: Атомиздат, 1973.— С. 12—21.
16. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. В 4 т. / Под ред. Тамма И. Е. — М.: Наука, 1965. — Т. 2.— С. 405.
17. *Планк М.* Принцип относительности и основные уравнения механики // Принцип относительности / Под ред. Тяпкина А. А.— М.: Атомиздат, 1973. — С. 163—167.
18. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. В 4 т. / Под ред. Тамма И. Е. — М.: Наука, 1965. — Т. 1.— С. 616—625.

19. *Паули В.* Теория относительности.—Пер. с нем. Гинзбурга В. Л., Левина Л. М. / Под ред. Гинзбурга В. Л.—М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
20. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля.—М.: Наука, 1980.
21. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—4-е изд., испр. и доп.—М.: Наука, 1971.
22. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.—Пер. с англ. Шестопал М. Г. / Под ред. Лопшица А. М.—М.: ИЛ, 1948.
23. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований.—Пер. с англ. Постникова М. М.—М.: ИЛ, 1947.
24. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ.—3-е изд.—М.: Наука, 1967.
25. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений: В 5 т. / Под общ. ред. Кагана В. Ф. и др.—М : Гостехиздат, 1949.—Т. 2.—С. 159.
26. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности.—М.: Наука, 1966.
27. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.—4-е изд., испр.—М.: Наука, 1984.
28. *Логунов А. А., Власов А. А.* // ТМФ.—1984.—Т. 60, № 1.—С. 3—8.
29. *Власов А. А., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ.—1984.—Т. 61. № 3.—С. 323—325.
30. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ.—1984.—Т. 61, № 3.—С. 327—345.
31. *Денисов В. И., Логунов А. А.* // ТМФ.—1982.—Т. 51, № 2.—С. 163—170.
32. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация: в 3 т.—Пер. с англ. / Под ред. Брагинского В. Б. и Новикова И. Д.—М.: Мир, 1977.—Т. 2.
33. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд.—М.: Наука, 1971.
34. *Мёллер Х.* Энергия и импульс, переносимые гравитационными волнами // Гравитация и топология / Под ред. Иваненко Д. Д.—М.: Мир, 1966.—С. 50—66.
35. *Schrodinger E.* // Phys. Zs.—1918.—Bd 19. № 1.—S. 4—7.
36. *Hilbert D.* // Nachrichten von der (K.) Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen.—1917.—Bd 4, № 1.—S. 21.
Klein F. Gesammelte mathematische Abhandlungen.—B.: Springer, 1921.
37. *Власов А. А., Денисов В. И.* // ТМФ.—1982.—Т. 53, № 3.—С. 406—418.
38. *Денисов В. И., Логунов А. А.* // ТМФ.—1980.—Т. 43, № 2.—С. 187—201.
39. *Денисов В. И., Логунов А. А.* // ТМФ.—1980.—Т. 45, № 3.—С. 291—300.
40. *Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.* // ТМФ.—1977.—Т. 33, № 2.—С. 174—184.
41. *Денисов В. И., Логунов А. А.* Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т 21. Новые представления о геометрии пространства—времени и гравитации.—М.: ВИНИТИ, 1982.

42. *Poincarè H.* // Bull. des Sciences Math. — 1904. — V. 28. — Ser 2.— P. 302—328.
43. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности: Современный анализ проблемы. 2-е изд., доп. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
44. *Логунов А. А.* и др. // ТМФ. — 1979. — Т. 40, № 3. — С. 291—328;
Денисов В. И., Логунов А. А. // ТМФ. — 1982. — Т. 50, № 1. — С. 3—76.
Денисов В. И., Логунов А. А. // ЭЧАЯ. 1982. — Т. 13, Вып. 4.— С. 757 — 934.
45. *Паули В.* Теория относительности. — Пер. с нем. // Под ред. Гинзбурга В. Л., Фролова В. П. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1983.
46. *Эддингтон А. С.* Теория относительности. Пер. с англ. / Под ред. Иваненко Д. Д. — М.: Гостехиздат, 1934.
47. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика.: В 9 т. / 6-е изд. испр. и доп. — Т. 2. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
48. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология.—Пер. с англ. / Под ред. Смородинского Я. А. — М.: Наука, 1974.
49. *Weyl H.* Raum—Zeit—Materie. Vorlesungen under allgemeine Relativitatstheorie. — 5-te, umgearb. Aufl. — Berlin: Springer Verlag, 1923.
50. *Ogievetsky V. I., Pclubarinov I. V.* // Ann. of Phys. — 1965. — V. 35. № 2. — P. 167—208.
51. *Fronsdal C.* // Sup. Nuovo Cim. — 1958. — V. 9. № 2. — P. 416—443;
Barnes K. J. // J. Math. Phys. — 1965. — V. 6. № 5. — P. 788—794.
52. *De-Donder Th.* La Gravifique Einshtenienne. — Paris: Gauthier-Villars, 1921;
De-Donder Th. Theorie des Champs Gravifiques. — Paris: Gauthier-Villars, 1926;
Fock V. A. // Journ. of Phys. — 1939. — V. 1, № 1. — P. 81—116;
Fock V. A. // Rev. Mod. Phys. — 1957. — V. 29. № 3. — P. 325—333.
53. *Rosen N.* // J. Phys. Rev. — 1940. — V. 57., № 2. — P. 147—153;
Rosen N. // Ann. of Phys. — 1963. — V. 22, № 1. — P. 1—11.
54. *Papapetrou A.* // Proc. Roy. Irish Acad. — 1948. — V. A52, № 2.— P. 11—23.
Gupta S. // Proc. Phys. Soc. — 1952. — V. A65, Pt 8, № 392A.— P. 608—619;
Thirring W. // Ann. of Phys. — 1961. — V. 16, № 1. — P. 96—117.
55. *Kohler M.* // Zs. Phys. — 1952. — Bd 131, Hft 4. — S. 571—602;
Kohler M. // Zs. Phys. — 1953. — Bd 134, Hft 3. — S. 286—305.
Kolher M. // Zs. Phys. — 1953. — Bd 134, Hft 3. — S. 306—316.
56. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Основы релятивистской теории гравитации.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
57. *Логунов А. А. Лоскутов Ю. М.* // ДАН СССР, 1985.— Т. 285.— № 3.— С. 615—618; // ТМФ.— 1986.— Т. 66.— № 1. — С. 150—154

58. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М.* // ТМФ.— 1986.— Т. 67.— № 2.— С. 163—176.
59. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М.* // ТМФ.— 1986.— Т. 67.— № 1.— С. 3—8.
60. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Чугреев Ю. В.* Объясняет ли общая теория относительности гравитационные эффекты?— М.: Изд-во МГУ, 1986; // ТМФ.— 1986.— Т. 69.— № 3.— С. 328—340.
61. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М.* Неоднозначность предсказаний общей теории относительности и релятивистская теория гравитации.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
62. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ЭЧАЯ.— 1986.— Т.17.— Вып. 1.— С. 5—160; // ТМФ.— 1986.— Т. 67.— № 3. — С. 323—335.
63. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации и критика ОТО.—М.: Изд-во МГУ, 1987.
64. *Шмутцер Э.* Теория относительности (современное представление).— М.: Мир, 1985.

Анатолий Алексеевич ЛОГУНОВ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ОСНОСИТЕЛЬНОСТИ И ГРАВИТАЦИИ

Современный анализ проблемы

Редактор *В. Я. Дубнова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Л. И. Назарова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32431

Сдано в набор 15.12.86. Подписано к печати 10.08.87. Т-17509. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,28. Усл. кр.-от. 14,6. Уч.-изд. л. 13,78. Тираж 9200 экз. Заказ № 3477. Цена 1 р. 80 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии изд-ва «Наука» 121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6. Зак. 933.